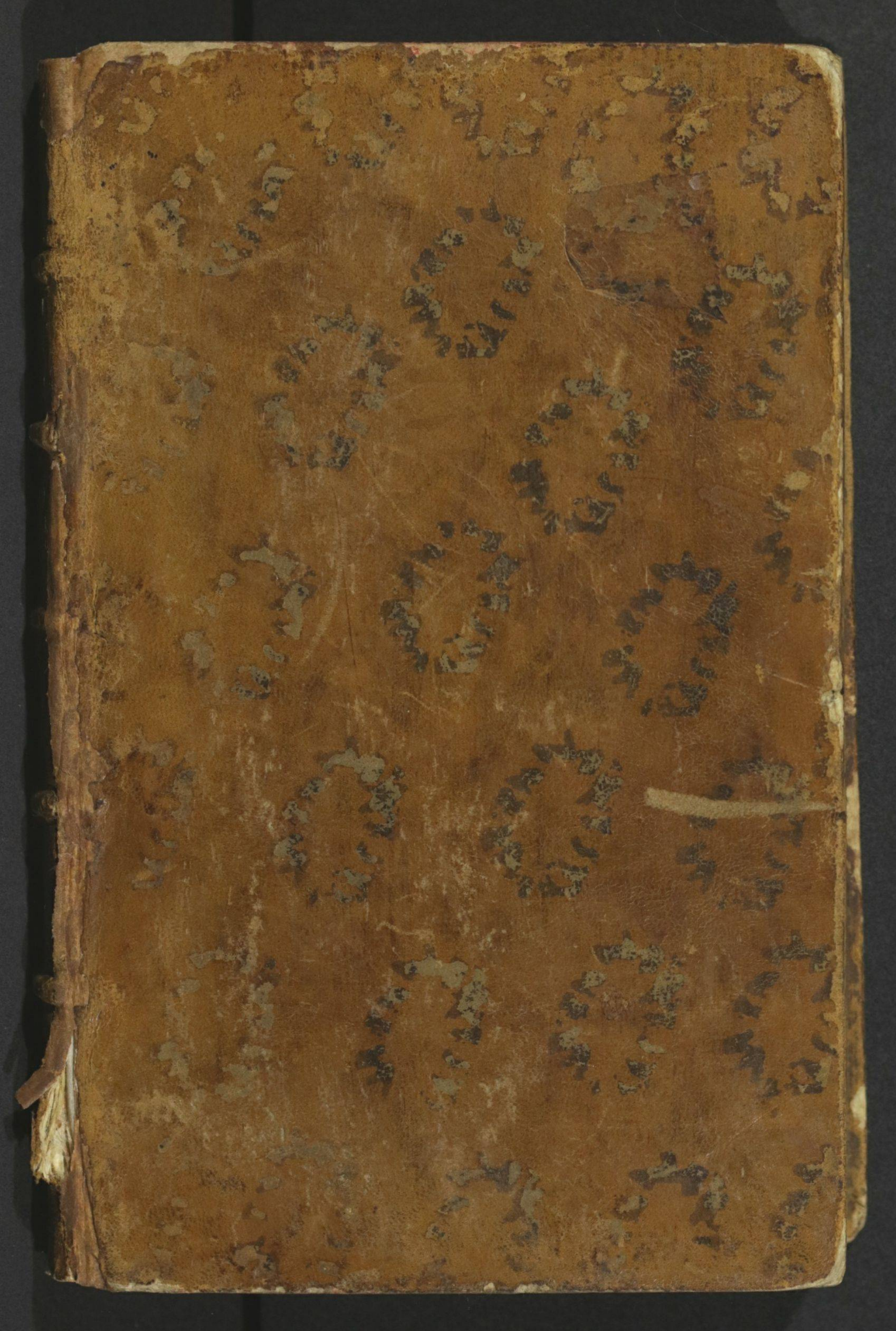
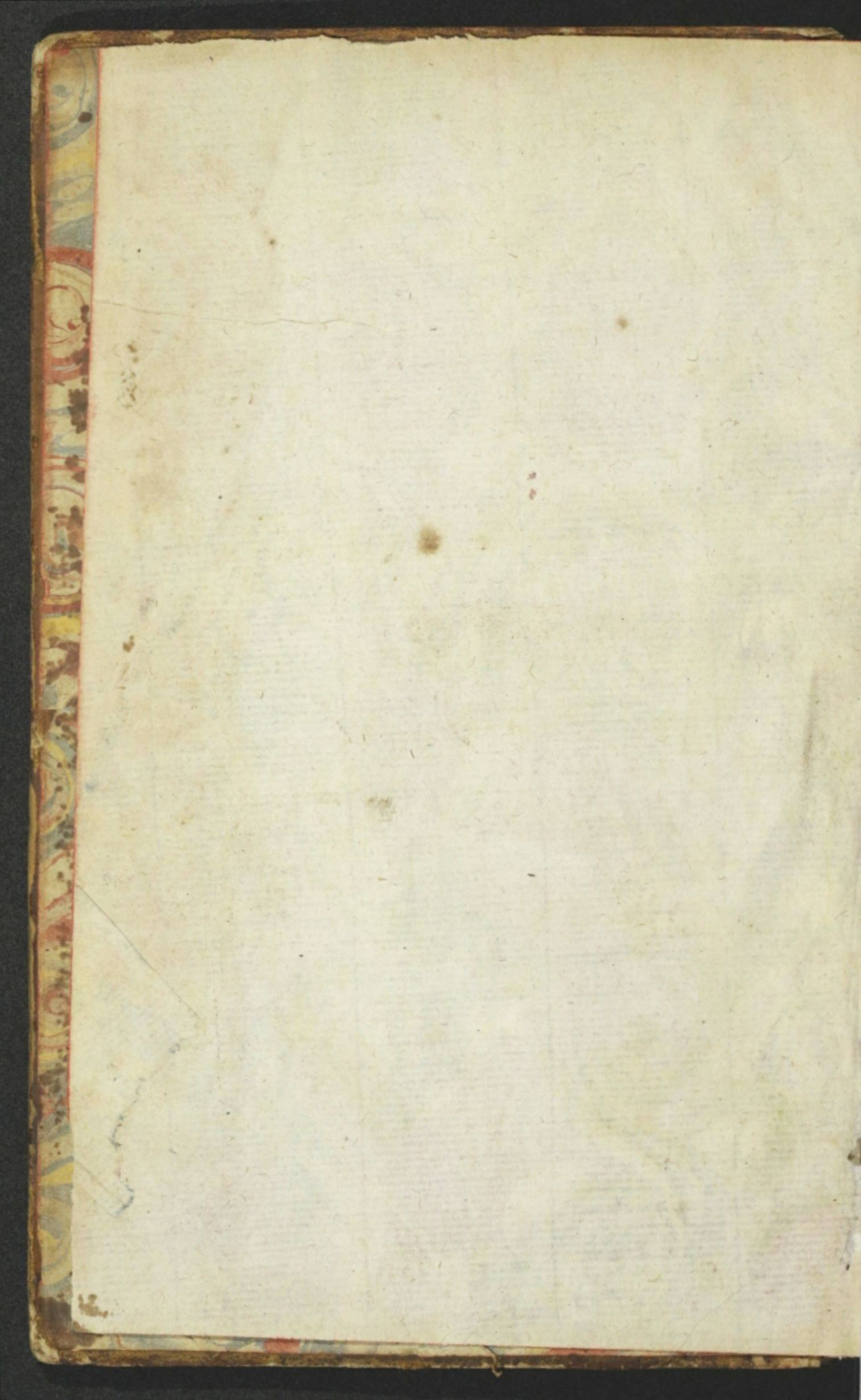








COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

CINQUIEME PARTIE.

TRAITÉ
ELÉMENTAIRE
D'HYDRODYNAMIQUE.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'HYDRODYNAMIQUE:

OUVRAGE

DANS LEQUEL LA THÉORIE ET L'EXPÉRIENCE s'éclairent ou se suppléent mutuellement; avec des Notes sur plusieurs endroits qui ont paru mériter d'être approfondis.

Par M. l'Abbé BOSSUT, *Examinateur des Ingénieurs, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de l'Institut de Bologne, & de la Société Royale de Lyon.*

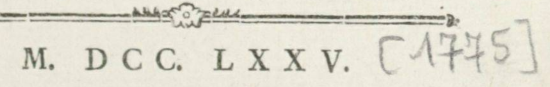
TOME SECOND.



A PARIS,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, Fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXV. [1775]



Avec Approbation & Privilége du Roi.



TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
D'HYDRODYNAMIQUE.

Suite de la seconde Partie.

CHAPITRE III.

Recherches expérimentales ſur la direction des particules d'un fluide dans l'intérieur du vaſe où elles ſe meuvent, & ſur la contraction de la veine fluide au ſortir de l'orifice.

310. Jusqu'ici, j'ai ſimplement donné la théorie de l'écoulement des fluides ; & ſi je me ſuis appuyé quelquefois ſur l'expérience, je n'en ai emprunté que

des résultats, sans entrer d'ailleurs dans aucun détail à ce sujet. Maintenant, voici les expériences que j'ai faites sur cette matière, avec les réflexions qu'elles ont amenées. On verra jusqu'à quel point la théorie est conforme aux phénomènes. Commençons par examiner la route que tiennent les particules d'un fluide en mouvement dans un vase, avant que de parvenir à l'orifice ; ensuite nous considérerons la forme que la veine fluide prend au sortir du même orifice. Ces deux objets sont essentiellement liés entr'eux ; car la forme de la veine fluide dépend de la direction que les particules ont au moment qu'elles sont prêtes à sortir du vase.

311. Pour bien voir ce qui se passe dans l'intérieur d'une masse fluide en mouvement, j'ai fait faire
Fig. 1. & 2. un vase cylindrique de verre *ADCB* (Fig. 1 & 2), dont la hauteur est d'environ 17 pouces, & le diamètre de $5\frac{1}{2}$ pouces. Au fond & sur l'un des côtés, sont deux ouvertures *M* & *N* auxquelles on peut adapter des ajutages de différens diamètres. Ce vase est porté à hauteur d'appui par deux chevilles horisontales, fichées à un poteau vertical. Les ajutages sont percés bien perpendiculairement dans des plaques de cuivre de $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur.

EXPÉRIENCE I.

Fig. 1. 312. Le vase *ADCB* (Fig. 1) ayant été rempli d'eau à la hauteur de 16 pouces au-dessus du fond, on a permis l'écoulement par un ajutage horisontal *M* de 4 lignes de diamètre. On entretenoit le vase

conſtamment plein à la hauteur propoſée, en y verſant, auſſi légèrement qu'il étoit poſſible, de l'eau avec une cruche. L'ébranlement que cette eau proviſionnelle occaſionnoit à la ſurface étoit peu ſenſible. Cela poſé, on a obſervé que des corpuſcules étrangers, comme de la limaille, des petits morceaux d'ardoiſe pilée, &c, mêlés dans l'eau, ſe dirigeoient vers l'orifice. Ils deſcendent d'abord ſuivant des directions verticales. Mais lorſqu'ils ſont parvenus en *OH*, à la diſtance de 3 ou 4 pouces du fond, ils ſe détournent viſiblement de cette direction, & viennent de tous côtés, ſuivant des mouvemens plus ou moins obliques, gagner l'orifice.

La même expérience répétée avec d'autres ajutages, a donné les mêmes réſultats à-peu-près.

Il en eſt de même lorſque l'eau ſort par une ouverture latérale *N* (Fig. 2) : toutes les particules ont une tendance vers l'orifice, comme il eſt repréſenté dans la Figure 2. Fig. 2.

EXPÉRIENCE II.

313. Après avoir fait remplir d'eau le vaſe *ADCB* (Fig. 1), à la hauteur de 16 pouces, on a permis l'écoulement par un orifice horiſontal *M* de 4 lignes de diamètre, ſans fournir de nouvelle eau. La ſurface du fluide en s'abaiſſant eſt demeurée horiſontale juſqu'à la diſtance d'environ 6 lignes de l'orifice. A cette hauteur, il s'eſt formé à la ſurface une eſpèce de petit *entonnoir* creux, dont la pointe répondoit au centre de l'orifice. La cavité de cet en-

tonnoir s'eſt agrandie de plus en plus ; & vers la fin de l'écoulement l'eau gliſſoit ſur l'arrête de l'orifice en forme de *nappe*. La tendance de toutes les particules vers l'orifice, s'eſt manifeſtée comme ci-devant.

La même expérience répétée avec un ajutage de 8 lignes de diamètre, a donné les mêmes réſultats. Seulement il m'a paru que l'entonnoir commençoit à ſe former à un peu moins de 6 lignes de diſtance à l'orifice.

Lorſque le vaſe ſe vuide par une ouverture verticale *N* (Fig. 2), la ſurface de l'eau demeure ſenſiblement horiſontale , tant qu'elle a une certaine hauteur au-deſſus de l'orifice. Mais quand elle eſt prête d'en toucher le bord ſupérieur, on la voit s'incliner un peu de ce côté. Il ſe forme en longueur un petit enfoncement dans la direction de l'orifice. Mais cette eſpèce de demi-entonnoir n'eſt pas, à beaucoup près, ſi ſenſible , que dans les écoulemens par des orifices horiſontaux.

Tous les jours on eſt à portée d'obſerver les mêmes choſes dans des pièces d'eau, ou dans d'autres grands réſervoirs. La ſurface de l'eau s'abaiſſe ou s'incline un peu vers l'ouverture par où ſe fait l'écoulement.

Réflexions.

314. La tendance univerſelle des particules fluides vers l'orifice, eſt une ſuite néceſſaire de leur parfaite mobilité. Car il eſt évident qu'elles doivent ſe diriger vers le point qui réſiſte le moins aux

forces dont elles ſont preſſées, ſous une profondeur déterminée. Or l'endroit de l'orifice eſt ce point de la moindre réſiſtance. Donc, &c.

315. Les particules qui ſortent, ſont continuellement ſuivies par d'autres qui les remplacent de proche en proche. Mais on conçoit que ce remplacement ne peut pas ſe faire dans un inſtant indiviſible. Ainſi, à parler dans la rigueur Géométrique, dès le premier moment de l'écoulement, il doit ſe former quelque part à la ſurface un petit enfoncement vers lequel les particules environnantes ont une tendance à-peu-près pareille à celle qu'un corps poſé ſur un plan incliné a pour deſcendre, quelque petite que puiſſe être l'inclinaiſon de ce plan. Lorſque l'eau a une certaine profondeur, l'enfoncement dont il s'agit ne doit pas paroître ſenſible, parce que les particules inférieures preſſées par les ſupérieures, ſont portées rapidement dans la direction de l'écoulement, & que de proche en proche elles entraînent les particules contigues en vertu de leur tenacité réciproque. Le parallèliſme de la ſurface eſt donc alors à-peu-près le même que ſi le fluide étoit en repos. Mais à meſure que la ſurface de l'eau s'abaiſſe, les particules ſe ſuccèdent les unes aux autres avec moins de vivacité, & l'entonnoir devient ſenſible. Dans les écoulemens par des orifices horiſontaux, la preſſion de l'air tend à l'agrandiſſement de l'entonnoir. En effet, l'atmoſphère preſſe par ſon poids la ſurface de l'eau. La colonne verticale d'air qui répond à l'orifice, s'inſinue dans le petit creux ou enton-

noir qui ſe forme dans le même endroit. Cette colonne ſeroit contrebalancée par l'effort contraire de la colonne d'air placée au-deſſous de l'orifice, ſi celle-ci déployoit librement toute ſon action ; mais comme l'eau en tombant repouſſe l'air & détruit une petite partie de ſa réaction, la première colonne doit l'emporter un peu ſur la ſeconde. D'où l'on voit que ſi les particules qui accourent de tous côtés vers l'orifice pour fournir à l'écoulement, n'ont pas aſſez de vîteſſe pour empêcher l'effet de cette inégalité de preſſion des deux colonnes dont on vient de parler, l'entonnoir s'agrandira ; & qu'il s'agrandira d'autant plus que la ſurface de l'eau s'abaiſſera davantage, & que par conſéquent les vîteſſes des particules diminueront. Il n'en eſt pas de même dans les écoulemens par des orifices verticaux, parce qu'alors il n'y a pas de colonne horiſontale d'air qui pouſſe l'eau vers l'orifice. Il eſt inutile d'ajouter que dans les écoulemens par des orifices inclinés, la formation de l'entonnoir doit tenir de celle qui a lieu pour un orifice horiſontal, & de celle qui a lieu pour un orifice vertical.

316. On ne peut pas annoncer en général la hauteur à laquelle l'entonnoir doit commencer à paroître au-deſſus d'un orifice horiſontal. Cela dépend de pluſieurs circonſtances phyſiques qui ne ſont pas les mêmes dans tous les cas. En me ſervant d'une cuve conique qui avoit 3 pieds 4 pouces de hauteur, 4 pieds de diamètre à ſa baſe inférieure, 4 pieds 2 pouces à ſa baſe ſupérieure, j'ai trouvé que la cuve

étant d'abord remplie entièrement, & se vuidant par un orifice d'un pied de diamètre, pratiqué au fond, l'entonnoir commençoit à paroître, lorsque la surface de l'eau étoit distante du fond, d'environ 5 à 6 pouces. La même cuve se vuidant par un autre orifice, aussi horisontal, de 3 pouces de diamètre, l'entonnoir a commencé à paroître, lorsque la surface de l'eau étoit distante du fond, d'environ 6 pouces. Il paroît que la formation de l'entonnoir est moins prompte ou moins sensible à mesure que l'orifice augmente comparativement à l'étendue du fond. L'aspérité plus ou moins grande du fond & des parois du vase, contribue aussi à augmenter plus ou moins l'entonnoir.

317. Ces sortes d'expériences, quoique fort simples, demandent à être faites avec précaution, si l'on veut connoître exactement la génération naturelle de l'entonnoir. On doit éviter, pour cela, que le fluide ne soit agité d'aucun mouvement étranger à celui qui produit librement l'écoulement. Car si la masse fluide a quelque mouvement primordial d'oscillation ou de turbination, quelque léger qu'il puisse être, l'air s'insinue dans les petits vuides que les particules laissent entr'elles par l'irrégularité & l'inégalité de leurs mouvemens; & l'entonnoir commence quelquefois à paroître dès le premier instant de l'écoulement, quoique l'eau ait une profondeur considérable. C'est ce que j'ai éprouvé avec la cuve dont je viens de parler. Lorsqu'après avoir rempli cette cuve, on ne donnoit pas à l'eau le temps de se cal-

mer parfaitement avant que de déboucher un orifice horiſontal, l'entonnoir paroiſſoit d'abord; ſa pointe ſe dirigeoit vers l'ouverture ; mais ſa baſe ſuivoit le mouvement de la ſurface de l'eau. Il avoit une forme tortueuſe & irrégulière. On comprend que dans ces cas-là l'air remplit la cavité de l'entonnoir, & y forme une eſpèce de noyau autour duquel les points fluides circulent par leurs forces centrifuges. Quand même ces petites forces viendroient à s'anéantir tout-à-fait, l'entonnoir ſubſiſteroit toujours. Car la difficulté que l'air feroit à en ſortir, ſoit à cauſe du frottement, ſoit par l'engrenage de ſes parties avec celles de l'eau, ſeroit plus que ſuffiſante pour détruire à chaque inſtant la petite force qui tend à rétablir le parfait niveau de la ſurſace. Cette derniere force diminue continuellement à meſure que la ſurface de l'eau s'abaiſſe, tandis qu'au contraire les cauſes qui produiſent l'entonnoir, ne ceſſent d'augmenter.

Souvent il ſe forme au-devant de l'empalement d'une piéce d'eau de grands entonnoirs aſſez ſemblables à ceux qu'on obſerve dans les écoulemens par des orifices horiſontaux. Ces entonnoirs ſont produits ordinairement par les inégalités du fond qui arrêtent ou détournent l'eau inférieure, & occaſionnent par-là différens mouvemens de rotation dans le fluide. Ils ont auſſi quelquefois pour cauſe les mouvemens antérieurs dont le fluide eſt agité, lorſque l'écoulement commence. La tendance naturelle des particules vers l'orifice étant troublée d'une manière ou d'autre, il doit réſulter dans le fluide des tour-

noyemens, des vuides que l'air remplit, & qui ne font qu'augmenter à mesure que le fluide s'abaisse, comme nous venons de l'expliquer. Il en est à-peu-près de même des tournoyemens qu'on observe dans les endroits d'une rivière, où l'eau a beaucoup de profondeur & peu de vîtesse.

318. Il est évident que quand l'entonnoir est une fois bien formé, & que l'écoulement d'un vase qui se vuide est prêt à finir, il ne sort pas une si grande quantité d'eau que si l'entonnoir n'existoit pas. Car l'air qui en remplit la cavité, occupe la place de l'eau qui devroit sortir naturellement. La fin des écoulemens est donc, par cette raison, extrémement incertaine ; & si on la vouloit déterminer par la théorie, on seroit exposé à commettre des erreurs très-sensibles. Mais cette incertitude ne tombe que sur la quantité d'eau écoulée, & non sur sa vîtesse qui est toujours la même que si l'entonnoir n'avoit pas lieu ; car l'air qui occupe la place de l'eau se meut avec la même vîtesse qu'elle auroit, & ne doit point troubler l'écoulement de l'eau contigue.

L'effet de l'entonnoir dans les écoulemens par des orifices verticaux, est insensible.

319. Examinons maintenant la contraction de la veine fluide au sortir de l'orifice.

Le réservoir dont je me suis servi dans les expériences qui suivent, est un parallèlepipede rectangle vertical, dont la hauteur est d'environ 12 pieds, & la base un quarré de 3 pieds sur chaque côté mesuré en-dedans. Le fond & les parois de ce paral-

lèlepipede, bien polis & bien dreſſés, ſont formés avec des madriers d'environ 20 lignes d'épaiſſeur. Il eſt ſuſpendu par des entretoiſes qui l'embraſſent fortement, & qui portent ſur un bâtis de charpente, de manière que le fond eſt parfaitement libre. Les parois ſont auſſi libres, juſqu'à la hauteur d'environ deux pieds au-deſſus du fond. L'eau dont on a beſoin eſt fournie par un tuyau adapté au conduit nourricier des fontaines de la ville de Mézieres. Cette eau jettée d'abord dans une cuve placée ſur un pont de bois, au niveau du deſſus du réſervoir, paſſe enſuite, au moyen d'une vanne & d'un canal, dans le réſervoir.

Fig. 3, 4, 5, 6. On voit toutes ces choſes en détail dans les Figures 3, 4, 5, 6. La Figure 3 eſt un profil général qui coupe perpendiculairement le pont, le réſervoir & la cuve ronde. Dans ce profil, 1 *HG* 2 eſt le pont; *ADCB* le réſervoir; *NOEP* la cuve ronde; *TM* le tuyau qui tire les eaux du conduit *T* des fontaines; *M* un robinet qu'on ouvre & ferme à volonté; *E* la vanne qui en ſe hauſſant ou ſe baiſſant permet ou interrompt le paſſage de l'eau de la cuve dans le réſervoir; *PK* un levier qui ſert à lever ou à baiſſer la vanne; *X* le canal qui tranſmet les eaux de la cuve dans le réſervoir; *R* & *L* les pièces de bois qui portent les entretoiſes par leſquelles le réſervoir eſt embraſſé.

Dans la Figure 4 qui eſt une coupe horiſontale de la machine, *ZY* & *W* eſt le plancher du pont; *tm* la projection horiſontale du tuyau *TM*; *mnop*

celle de la cuve; *adcb* le plan du réſervoir; *SIV* le plan du bâtis qui porte le réſervoir; *X* le plan du canal qui communique de la cuve au réſervoir.

La Figure 5 repréſente ſéparément le plan du réſervoir, du canal & de la cuve. On y voit que le fond du réſervoir eſt percé de différentes ouvertures.

La Figure 6 eſt un profil *kfgh* de la cuve, lequel eſt perpendiculaire au premier *NOEP*, & ſert à faire voir l'empalement dans ſes dimenſions horiſontales.

320. Le réſervoir *ADCB* eſt percé non-ſeulement à ſon fond, mais encore à ſes parois, de différentes ouvertures auxquelles ſont appliquées dans ſon intérieur de larges plaques de cuivre, bien dreſſées, & d'environ $\frac{1}{2}$ ligne d'épaiſſeur. Ces plaques ſont elles-mêmes percées perpendiculairement de trous par leſquels l'eau s'écoule. Ils ſont moindres que les ouvertures faites dans le bois, afin de pouvoir examiner & meſurer commodément en-dehors le diamètre de la veine fluide. On empêche l'écoulement, quand on veut, par des tampons de bois qu'on met en dehors dans les ouvertures du bois, & qui n'atteignent pas juſqu'au cuivre. Quand je me ſervirai dans la ſuite du mot *orifice* ou *ouverture*, il ne ſera queſtion que des orifices percés dans le cuivre, les ſeuls par leſquels l'écoulement ſe faſſe, comme je viens de le dire.

321. Je me ſuis ſervi d'un compas ſphérique, pour meſurer le diamètre de la veine fluide; &

j'ai pris cette meſure à l'endroit, où, à compter de la face intérieure de l'orifice, la veine ceſſe de ſe reſſerrer. Elle conſerve ſenſiblement la même groſſeur ſur quelques lignes d'étendue. Enſuite elle augmente ou diminue par la réſiſtance de l'air ambiant, combinée avec la peſanteur; mais il ne s'agit pas ici de ces variations.

Pour éviter, autant qu'il m'eſt poſſible, les répétitions inutiles, je comprends ſous le même numero, lorſque cela ſe peut ſans déroger aux droits de la clarté, pluſieurs expériences qui ont quelque condition principale de commune, en énonçant une fois ſeulement cette condition à la tête de l'article.

EXPÉRIENCES III, IV, V, VI.

Fig. 7. 322. Dans ces quatre expériences, l'eau a été entretenue dans le réſervoir *ADCB* (Fig. 7), à la hauteur conſtante de 11 pieds 8 pouces 10 lignes au-deſſus du fond, au moyen de l'eau proviſionnelle contenue dans la cuve; & on a obſervé les faits qui ſuivent.

I. L'eau ſortant par une ouverture horiſontale & circulaire d'un pouce de diamètre, la veine fluide diminue de groſſeur juſqu'à la diſtance de 6 à 7 lignes de la face intérieure du fond; & alors elle n'a pas tout-à-fait 10 lignes de diamètre. J'ai évalué ce diamètre à $9\frac{4}{5}$ lignes.

II. L'eau ſortant par une ouverture horiſontale & circulaire, de 2 pouces de diamètre, le diamètre de la veine, meſuré à 12 ou 13 lignes de la face

intérieure de l'orifice, eſt de 19 $\frac{1}{2}$ lignes environ

III. L'eau ſortant par une ouverture horiſontale & circulaire, de 3 pouces de diamètre, le diamètre de la veine, meſuré à 18 lignes de la face intérieure de l'orifice, eſt de 29 $\frac{1}{4}$ lignes environ.

IV. L'eau ſortant par une ouverture horiſontale & quarrée, d'un pouce de côté, la ſection de la veine, meſurée à 7 lignes de la face intérieure de l'orifice, eſt un quarré qui a environ 9 $\frac{4}{5}$ lignes de côté. Les angles de ce quarré répondent aux milieux des côtés du premier. Nous ajouterons en paſſant que la même correſpondance d'angles aux milieux des côtés des quarrés ſupérieurs continue à ſe répéter juſqu'à ce que la réſiſtance de l'air ait entièrement défiguré la veine. Ce jeu eſt agréable à la vûe.

Réſultat de ces expériences.

323. En appellant A l'aire de l'orifice, a l'aire de la ſection de la veine fluide *contractée*, on a, à peu de choſe près,

par la première expérience, . . . $A : a :: 150 : 100$,
par la ſeconde, ... $A : a :: 151\frac{1}{2} : 100$,
par la troiſième, ... $A : a :: 151\frac{1}{2} : 100$,
par la quatrième, ... $A : a :: 150 : 100$.

Expériences VII, VIII.

324. Les écoulemens ſe font ici par des ouvertures verticales; & dans chaque expérience l'eau eſt entretenue dans le réſervoir à la hauteur conſtante

de 9 pieds au-dessus du centre de chaque ouverture.

I. L'eau sortant par une ouverture circulaire de 6 lignes de diamètre, la veine fluide se resserre également en tout sens jusqu'à la distance de 4 à 5 lignes de la face intérieure de l'orifice; & alors son diamètre est de $4 \frac{8}{9}$ lignes environ.

II. L'eau sortant par une ouverture circulaire d'un pouce de diamètre, la veine fluide se resserre également en tout sens jusqu'à la distance de 6 à 7 lignes de la face intérieure de l'orifice; & alors son diamètre me paroît être de $9 \frac{4}{5}$ lignes.

Résultat de ces deux expériences.

Par la première, $A : a :: 150 \frac{3}{5} : 100$, à-peu-près.
Par la seconde, $A : a :: 150 : 100$, à-peu-près.

EXPÉRIENCES IX, X.

325. En faisant sortir l'eau par deux ouvertures verticales & égales aux deux précédentes, mais placées seulement à 4 pieds de la surface du fluide qu'on entretient toujours à cette hauteur, je trouve dans les deux cas les mêmes résultats qu'on vient de voir.

RÉFLEXIONS.

326. La contraction de la veine fluide est en général une preuve évidente que dans l'intérieur du vase les particules latérales, comme celles qui répondent directement à l'orifice, se dirigent vers ce point suivant des mouvemens plus ou moins obli-

ques. Elle a également lieu, ſoit que le fluide ſorte par une ouverture horiſontale ou latérale; & le point où elle ceſſe, eſt toujours diſtant de la face intérieure de la paroi, d'une quantité à-peu-près égale au raïon de l'orifice. Lorſque l'écoulement ſe fait par une ouverture horiſontale, tous les diamètres de la veine contractée ſont égaux. Cela eſt vrai auſſi pour les ouvertures latérales dont les diamètres ſont fort petits en comparaiſon de la hauteur du fluide dans le réſervoir, comme dans les quatre dernières expériences. Mais ſi une ouverture latérale, de grandeur ſenſible, étoit placée proche la ſurface du fluide, le diamètre horiſontal de la veine contractée, ſeroit plus grand que les autres. J'en ai fait l'expérience dans l'écoulement par un orifice vertical d'un pouce de diamètre, & dont le bord ſupérieur étoit éloigné d'une ligne, de la ſurface de l'eau. On ſent que la choſe doit être ainſi. Car au paſſage de l'orifice les particules inférieures ayant alors ſenſiblement plus de vîteſſe que les ſupérieures, les paraboles décrites par celles-ci ont moins d'amplitude que les paraboles décrites par celles-là. D'où réſulte une augmentation dans le diamètre horiſontal, & une diminution dans le diamètre vertical. Il n'eſt guères poſſible alors de déterminer exactement la contraction par le meſurage des diamètres de la veine.

327. Dans les écoulemens par des ouvertures verticales, la contraction proprement dite, eſt produite toute entière par le mouvement oblique que les particules latérales ont pris dans l'intérieur même

du vaſe. Mais dans ceux qui ſe font par des ouvertures horiſontales, les particules immédiatement après leur ſortie de l'orifice, ſont accélérées par la peſanteur; & cette accélération eſt une nouvelle cauſe qui tend à augmenter la première contraction. L'effet qu'elle produit ainſi ne peut être que très-léger, lorſque la hauteur du fluide au-deſſus de l'orifice eſt conſidérable, comme dans les expériences précédentes.

328. Suivant ces mêmes expériences, il ne paroît pas que les différentes hauteurs du fluide au-deſſus de l'orifice, produiſent des variations dans la quantité de la contraction. Mais ſuppoſé que de telles variations ayent lieu, elles ne peuvent être déterminées que par des expériences d'un genre qui admette une préciſion beaucoup plus grande que celle qu'on peut ſe flatter de porter dans la meſure du diamètre de la veine contractée. Nous verrons dans la ſuite ce que les quantités d'eau écoulées peuvent faire conclure à ce ſujet.

329. Il eſt évident qu'en vertu de la contraction, la quantité d'eau qui s'écoule en un temps donné, doit être moindre qu'elle ne ſeroit ſi toutes les particules ſortoient perpendiculairement au plan de l'orifice. Car le mouvement oblique que les particules latérales ont réellement, ſe décompoſe en deux autres, l'un parallèle au plan de l'orifice & qui reſſerre la veine, l'autre perpendiculaire au même plan & le ſeul qui produiſe l'écoulement.

330. Puiſqu'au point de la contraction, la veine prend & conſerve ſur une petite étendue la forme priſmatique,

prismatique, si en cet endroit on connoissoit la vîtesse du fluide, & qu'on eût bien mesuré la section de la veine contractée, il est clair qu'en regardant cette section comme le vrai orifice par lequel se fait l'écoulement, on trouveroit exactement la quantité d'eau qui sort en un temps donné. Mais il est très-difficile de mesurer le diamètre de la veine contractée avec la précision que cette méthode demanderoit. Aussi les Auteurs qui ont entrepris de déterminer la contraction par ces sortes de mesurages, sont-ils parvenus à des résultats quelquefois assez différens.

331. Selon les mesures de Newton, l'aire A de l'orifice est à l'aire a de la section de la veine contractée, comme $\sqrt{2}$ est à 1, ou comme 141 est à 100 environ. D'autres Auteurs ont donné d'autres rapports. Selon nos expériences, on a sensiblement $A : a :: 150 : 100 :: 3 : 2$. Il n'y a dans cette différence de résultats rien qui doive surprendre. Car, outre que les variétés dans les frottemens contre les bords de l'orifice doivent en occasionner dans la contraction, si l'on se trompe de quelque chose dans la mesure du diamètre de la veine contractée, cette erreur pourra devenir sensible dans la détermination de l'aire de la section, les aires des cercles étant proportionnelles aux quarrés de leurs diamètres; & elle le deviendra d'autant plus que le diamètre mesuré sera plus petit. Newton a établi son rapport d'après la mesure d'une veine fluide qui sortoit par un orifice d'environ 6 lignes de diamètre. Or supposons que dans les expériences VII & IX où le

fluide ſort par une ouverture de 6 lignes de diamètre, j'euſſe trouvé 5 lignes, au lieu de 4 $\frac{8}{9}$ lignes, pour le diamètre de la veine contractée, on auroit eu $A : a :: 36 : 25 :: 144 : 100$, ce qui ſe rapproche fort du rapport donné par Newton. Tous ceux qui voudront répéter ces expériences, reconnoîtront que loin de pouvoir répondre qu'on ne s'eſt pas trompé de $\frac{1}{9}$ de ligne dans la meſure d'un diamètre, on eſt expoſé à commettre des erreurs beaucoup plus fortes. On doit donc préférer, pour cette recherche, les grands orifices aux petits ; & c'eſt ce qui m'a déterminé à faire les expériences III, IV, V, VI, VIII, X. Quoique j'aye fait ces expériences avec tout le ſoin poſſible, je ne les crois ni aſſez ſûres ni aſſez préciſes pour ſervir de baſe à la détermination des écoulemens, lorſqu'on voudra mettre dans cette détermination toute l'exactitude dont elle eſt ſuſceptible. Nous allons donc chercher d'autres moyens plus propres à remplir cet objet. Mais avant que d'en venir-là, il étoit néceſſaire de conſtater, pour ainſi dire, aux yeux, l'exiſtence de la contraction & la forme qu'elle fait prendre à la veine fluide, pour n'être pas étonné enſuite des différences qui ſe trouvent entre les réſultats que la théorie donne lorſqu'on employe les orifices ſans y faire aucune correction, & ceux que l'expérience donne réellement. Faute d'avoir bien examiné d'abord l'effet de la contraction, Newton dans la première édition de ſes *Principes Mathématiques*, avoit déterminé d'une manière erronée, d'a-

près la mesure des quantités d'eau écoulées, la hauteur dûe à la vîtesse du fluide au sortir de l'orifice. Il faisoit cette hauteur égale seulement à la moitié de celle du réservoir, tandis qu'il est certain par la vraie théorie & par l'expérience des jets d'eau, comme il le reconnut dans la suite, en ayant égard à la contraction, que la première hauteur est à très-peu de chose près égale à la seconde entière.

332. Des Auteurs célèbres ont regardé la contraction comme un effet purement accidentel, & ont cru qu'on pouvoit l'anéantir en faisant sortir l'eau par des bouts de tuyaux adaptés au réservoir. Il est bien vrai que l'eau suit les parois de ces tuyaux, du moins quand ils ont une certaine longueur, & que la veine sort alors sous la forme cylindrique. Mais la contraction subsiste toujours en partie à l'entrée de ces mêmes tuyaux, & on verra ci-dessous qu'elle diminue d'une manière sensible les quantités d'eau qu'ils devroient donner naturellement.

CHAPITRE IV.

Expériences & réflexions sur le mouvement des eaux qui sortent des réservoirs où elles sont contenues.

333. Mon but dans ce chapitre est de déterminer par la voie de l'expérience tout ce qui est rela-

tif à l'écoulement d'un fluide qui ſort d'un vaſe par une ouverture ; de comparer ces réſultats avec ceux que la théorie donne, & d'établir ſur cette matière des régles générales & facilement applicables aux beſoins de la pratique.

Pour ſuivre ici le même ordre que dans le chapitre premier, je conſidérerai ſéparément le cas où l'eau ſort d'un vaſe entretenu conſtamment plein, & celui où elle s'écoule ſans que le vaſe en reçoive d'autre.

SECTION I.

Meſure des eaux qui ſortent de réſervoirs entretenus conſtamment pleins.

334. Pour déterminer la quantité d'eau qui ſort d'un réſervoir pendant un temps propoſé, il faut avoir un vaſe dont on connoiſſe exactement la capacité pour recevoir & toiſer l'eau, & un inſtrument commode qui détermine le temps de l'écoulement.

335. En conſéquence, j'ai fait d'abord conſtruire par un ouvrier très-adroit, un cube *X* de cuivre
Fig. 8. (Fig. 8), ayant exactement 6 pouces de côté en-dedans, & ouvert par en-haut. Il contient, comme on voit, la huitième partie d'un pied cube, lorſqu'il eſt entièrement plein. Sur ſes quatre faces intérieures & verticales ſont tracées quatre échelles verticales, diviſées exactement en lignes, leſquelles ſervent

à mesurer dans le besoin, les quantités d'eau qui ne remplissent pas entièrement le cube.

336. Par le moyen de ce même cube qui a toujours servi de jauge ou d'unité fondamentale, on a déterminé le pied cube dans un petit baril *PRTQ* (Fig. 9) fermé de tous côtés, & sur le fond supérieur *PQ* duquel sont adaptés deux tuyaux *S* & *K* de fer blanc. Le premier tuyau qui a 10 lignes de diamètre, & qui est placé dans la partie la plus éminente de *PQ*, est destiné à laisser sortir l'air que l'eau entraîne avec elle. On a marqué dans le second le point *K* où la surface de l'eau arrive pour former le pied cube. Comme cette surface est peu étendue, on ne peut pas se tromper sensiblement, en marquant dans le cylindre *K* les points de repaire qui la limitent ; & on parvient ainsi à se procurer une mesure fort exacte du pied cube. Fig. 9.

337. De même avec le secours du pied cube, on a formé une mesure de 8 pieds cubes dans un large tonneau *IFGE* (Fig. 10), fermé de tous côtés, & garni à son fond supérieur de deux tuyaux *S* & *K* de fer blanc qui ont les mêmes fonctions que dans l'article précédent. Le premier *S* a toujours 10 lignes de diamètre. Mais le second *K* a ici 8 pouces de diamètre ; on lui a donné ainsi une certaine largeur pour pouvoir y recevoir plus facilement l'eau. Il a 10 à 11 pouces de hauteur au dessus du point *K* qui marque la limite des 8 pieds cubes. Fig. 10.

338. Le tuyau *S* est d'une nécessité indispensable. Car l'eau en se précipitant, soit dans le baril *PRTQ*,

ſoit dans le tonneau *IFGE*, entraîne avec elle une grande quantité d'air qui en pourroit changer ſenſiblement & inégalement le volume, ſi on ne lui donnoit pas une iſſue. Je l'ai vu par une expérience qui, quoique faite groſſièrement, eſt ſuffiſante pour prouver ce que je viens de dire. Ayant fait enlever du tonneau *IFGE* le tuyau *S*, & fait boucher le trou où il eſt placé, on a reçu de l'eau dans ce même tonneau, juſqu'à ce que le tuyau *K* fût preſque plein; & on a trouvé enſuite qu'en la remuant avec un bâton pour en faire ſortir l'air, ſa ſurface s'abaiſſoit de pluſieurs pouces dans le cylindre *K*.

339. Outre les meſures précédentes, nous avons encore d'autres vaſes dans leſquels on reçoit quelquefois l'eau qu'on jauge enſuite par le moyen des *étalons* propoſés, ſur-tout du cube *X*. Mais autant que cela ſe peut, on la reçoit immédiatement dans le baril *PRTQ* ou dans le tonneau *IFGE*, pour éviter les tranvaſemens & les petites erreurs qui en peuvent réſulter dans les meſures. Quand la ſurface de l'eau, dans l'un ou l'autre cas, eſt au-deſſous ou au-deſſus du point *K*, on détermine le *défaut* ou *l'excès*, à l'aide du cube *X*.

340. On ſçait que la ſurface de l'eau contenue dans un vaſe, peut dépaſſer ſes bords de plus d'une ligne ſans ſe répandre. Pour ôter cette quantité excédente dans la meſure de l'eau que le cube *X* entièrement rempli doit contenir, on fait paſſer pluſieurs fois ſur ſa baſe ſupérieure, bien de niveau, une règle qui ne laiſſe au-deſſous que la quantité pré-

ciſe d'eau néceſſaire pour remplir la capacité du cube. Cet étalon a toute la juſteſſe qu'on peut déſirer. Il m'a ſervi à déterminer le poids de l'eau des fontaines de la ville de Mézieres. La quantité qu'il en contient, peſe 8 livres 11 onces 6 gros, ce qui donne 69 livres 14 onces pour le poids du pied cube. L'eau dont il s'agit eſt très-limpide & excellente à boire. Cette expérience a été faite au commencement de Septembre 1766, par un très-beau temps. Je n'avois pas alors ſous la main de bon Thermomètre pour connoître la température préciſe de l'air. Mais on ſent qu'une telle connoiſſance étoit inutile à mon objet principal.

341. La meſure du temps a été priſe, ou ſur une excellente montre à ſecondes, ou le plus ſouvent ſur le pendule ſimple à ſecondes. Ce pendule eſt, comme on ſçait, un fil de ſoye ou de laiton qui ſoutient une balle de plomb de 3 ou 4 lignes de diamètre, dont le centre eſt diſtant du point de ſuſpenſion, de 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes, & dont chaque oſcillation, ſuppoſée très-petite, eſt exactement d'une ſeconde. Cette longueur du pendule eſt celle qui convient au parallèle de Paris. Mais on peut l'employer auſſi à Mézieres, dont la latitude ne diffère pas d'un degré & demi de celle de Paris.

342. Dans les quinze premieres expériences qui ſuivent, je me ſuis ſervi du réſervoir qui a été décrit (319), & qui eſt repréſenté dans les Figures 3, 4, 5, 6. J'ajouterai ſeulement ici que le canal *X* qui tranſmet l'eau de la cuve au réſervoir, eſt

incliné du côté de la cuve, dans la vûe de ralentir la vîteſſe de l'eau proviſionnelle, & d'empêcher qu'elle ne communique d'ébranlement à la maſſe contenue dans le réſervoir.

343. Pour prendre commodément l'eau qui ſort par des trous faits au fond du réſervoir, on em-
Fig. 11. ploye (Fig. 11) un long canal *YOXH* garni d'un entonnoir fixe *X*, & couvert dans la plus grande partie de ſa longueur par la planche *XH*. Ce canal conduit l'eau au vaſe de jauge, par exemple, au tonneau *IFGE*. On ne commence à prendre l'eau que quand l'écoulement eſt bien établi. La perſonne chargée de faire gliſſer alors l'entonnoir *X* ſous le trou, entend compter les oſcillations du pendule. Elle peut même ſuivre aiſément de l'œil le mouvement de la balle, & ſaiſir, à très-peu de choſe près, le premier inſtant de l'oſcillation à laquelle on convient de commencer l'opération. Il en eſt de même du dernier inſtant de l'écoulement.

344. Quant à l'eau qui ſort par des ouvertures
Fig. 12. latérales, on la reçoit (Fig. 12) dans le tonneau *IFGE*, par le moyen d'un grand entonnoir *ZV* de fer blanc, garni en-dedans de ſa partie ſupérieure, d'un peu de foin ou de paille, pour empêcher l'eau de réjaillir.

345. Il n'eſt pas indifférent, quant à la quantité de l'écoulement, que l'eau ſorte par un orifice percé dans une mince paroi, ou par un bout de tuyau dont elle ſuive les parois, comme on le verra ci-deſſous. J'examinerai par ordre les différens cas.

De toutes les expériences que je vais rapporter, il n'y en a aucune qui n'ait été répétée plusieurs fois & variée de différentes manières.

§. I. *Ecoulemens par des orifices percés dans de minces parois.*

346. Les orifices dont il s'agit ici sont percés bien perpendiculairement dans des plaques de cuivre qui ont environ $\frac{1}{2}$ ligne d'épaisseur. Nous allons commencer par établir des faits ; nous verrons ensuite les conséquences qui en résultent.

EXPÉRIENCES I, II, III, ... VI.

347. Dans toutes ces expériences, l'eau a été entretenue dans le réservoir à la hauteur constante de 11 pieds 8 pouces 10 lignes au-dessus de chaque orifice ; & on a observé les faits qui suivent.

I. En 50 secondes, une ouverture horisontale & circulaire, de 6 lignes de diamètre, a donné 1 pied cube d'eau + 198 pouces cubes, c'est-à-dire, en tout 1926 pouces cubes.

II. En 90 secondes, une ouverture horisontale & circulaire, de 1 pouce de diamètre, a donné 8 pieds cubes d'eau + 97 pouces cubes, c'est-à-dire, en tout 13921 pouces cubes.

III. En 21 secondes, une ouverture horisontale & circulaire, de 2 pouces de diamètre, a donné 8 pieds cubes d'eau — 803 pouces cubes, c'est-à-dire, en tout 13021 pouces cubes.

IV. En 50 secondes, une ouverture horisontale & rectangulaire de 1 pouce de longueur sur 3 lignes

de largeur, a donné 1 pied cube d'eau + 716 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 2444 pouces cubes.

V. En 71 ſecondes, une ouverture horiſontale & quarrée, de 1 pouce de côté, a donné 8 pieds cubes d'eau + 160 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 13984 pouces cubes.

VI. En 17 ſecondes, une ouverture horiſontale & quarrée, de 2 pouces de côté, a donné 8 pieds cubes d'eau — 405 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 13419 pouces cubes.

Réſultat de ces Expériences.

348. Puiſque la hauteur du fluide demeure conſtamment la même au-deſſus d'un orifice pendant tout le temps de l'écoulement, & que par conſéquent l'eau ſort toujours par cet orifice avec une vîteſſe uniforme, il eſt évident que les quantités d'eau fournies en différens temps par une même ouverture, ſont entr'elles comme ces temps. Ainſi en réduiſant tous les temps des écoulemens propoſés à une même meſure, & prenant 1 minute pour cette meſure commune, on formera la table ſuivante par de ſimples proportions. Comme il eſt impoſſible de répondre qu'une expérience, quoique répétée pluſieurs fois, ſoit exacte à 1 ou 2 pouces cubes près, ſur-tout quand la dépenſe eſt conſidérable, je n'ai pas cru devoir ſurcharger mes tables des fractions que les proportions donnent quelquefois. Lorſque ces fractions ſont moindres que $\frac{1}{2}$, je les néglige; & lorſqu'elles valent $\frac{1}{2}$ ou plus de $\frac{1}{2}$, j'écris 1 à leur place.

Hauteur constante de l'eau au-dessus de chaque orifice = 11 pieds 8 pouces 10 lignes.	Nombre de pouces cubes d'eau fournis en 1 minute.
Par l'orifi. circ. de 6 lig. de diam. . . .	2311
Par l'orifi. circ. de 1 pouce de diam. . .	9281
Par l'orifi. circ. de 2 pouces de diam. .	37203
Par l'orifi. rect. de 1 pouce sur 3 lignes.	2933
Par l'orifi. quarré de 1 pouce de côté. .	11817
Par l'orifi. quarré de 2 pouces de côté. .	47361

EXPÉRIENCES VII, VIII.

349. L'eau s'écoule par des orifices verticaux, & on l'entretient dans le réservoir à la hauteur constante de 9 pieds au-dessus du centre de chaque ouverture dans chaque expérience.

I. En 55 secondes, une ouverture verticale & circulaire de 6 lignes de diamètre, a donné 1 pied cube d'eau + 122 pouces cubes, c'est-à-dire, en tout 1850 pouces cubes.

II. En 100 secondes, une ouverture circulaire & verticale, de 1 pouce de diamètre, a donné 8 pieds cubes d'eau — 266 pouces cubes, c'est-à-dire, en tout 13558 pouces cubes.

Résultat de ces deux expériences.

350. En réduisant les temps des écoulemens à

1 minute, & faiſant des proportions analogues à celles qu'on a employées dans l'article précédent, on formera la table ſuivante.

Hauteur conſtante de l'eau au-deſſus du centre de chaque orifice = 9 pieds.	Nombre de pouces cubes d'eau fournis en 1 minute.
Par l'orific. circ. de 6 lignes de diam..	2018
Par l'orifi. circ. de 1 pouce de diam..	8135

EXPÉRIENCES IX, X.

351. L'eau ſort par deux orifices égaux chacun à chacun des deux précédens; & elle eſt entretenue dans le réſervoir, à la hauteur conſtante de 4 pieds au-deſſus du centre de chaque ouverture.

I. En 60 ſecondes, une ouverture verticale & circulaire de 6 lignes de diamètre a donné 1353 pouces cubes d'eau.

II. En 150 ſecondes, une ouverture verticale & circulaire d'un pouce de diamètre a donné 8 pieds cubes d'eau — 233 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 13591 pouces cubes.

Réſultat de ces deux expériences.

352. En continuant à prendre la minute pour la meſure commune du temps, on formera la table ſuivante.

Hauteur conſtante de l'eau au-deſſus du centre de chaque orifice = 4 pieds.	Nombre de pouces cubes d'eau fournis en 1 minute.
Par l'orifi. circ. de 6 lignes de diam...	1353
Par l'orifi. circ. de 1 pouce de diam...	5436

EXPÉRIENCE XI.

353. L'eau étant entretenue dans le réſervoir à la hauteur conſtante de 7 lignes au-deſſus du centre d'une ouverture verticale & circulaire qui a 1 pouce de diamètre, en 2 minutes 45 ſecondes, on reçoit 1 pied cube d'eau. Ce produit revient à 628 pouces cubes en 1 minute.

La ſurface de l'eau s'abaiſſe en longueur dans la direction de l'orifice ; mais cette eſpèce de demi-entonnoir eſt très-peu ſenſible.

Si l'on ſuppoſe, comme on fait ordinairement, que le pied cube d'eau contienne 36 pintes de Paris, on trouvera que la dépenſe précédente revient à 13 $\frac{1}{12}$ pintes par minute. M. Mariotte, qui a fait la même expérience, trouve la dépenſe un peu plus forte. Mais je crois pouvoir garantir la parfaite juſteſſe de mon opération. J'avois une ſurface d'eau très-étendue, ſenſiblement immobile ; au lieu que dans l'expérience de M. Mariotte l'eau proviſionnelle qu'on jettoit dans le vaſe pour l'entretenir plein à la même

hauteur, pouvoit y occaſionner quelqu'ébranlement. Or ſi la ſurface s'élève au-deſſus des 7 lignes, ou s'abaiſſe au-deſſous, on obtiendra des réſultats ſenſiblement différens. De plus il peut ſe faire que M. Mariotte & moi n'ayons pas employé des étalons exactement de la même grandeur. Enfin on doit remarquer que cet Auteur a varié pluſieurs fois dans ſes réſultats à ce ſujet.

Réflexions.

354. On voit par chacune des tables précédentes que *les dépenſes faites en temps égaux par différentes ouvertures, ſous une même hauteur de réſervoir, ſont entr'elles, à peu de choſe près, comme les aires de ces ouvertures.* Car prenons, par exemple, dans la première table, les dépenſes 37203 pouces cubes & 9281 pouces cubes, que font les deux ouvertures circulaires qui ont, l'une 2 pouces de diamètre, l'autre 1 pouce de diamètre, on trouvera que ces deux dépenſes ſont entr'elles, à peu de choſe près, dans le rapport de 4 à 1, qui eſt celui des deux ouvertures en queſtion. La même choſe a lieu dans tous les cas pareils. Nous examinerons ci-deſſous pourquoi les dépenſes ne ſont pas exactement proportionnelles aux ouvertures.

355. Par la comparaiſon de deux quelconques de nos tables, on trouvera que *les dépenſes faites en temps égaux, par une même ouverture, ſous différentes hauteurs de réſervoirs, ſont entr'elles, à peu de choſe près, comme les racines quarrées des hauteurs correſ-*

pondantes de l'eau dans le réſervoir au-deſſus des mêmes ouvertures. Ainſi, par exemple, ſi l'on prend dans les tables II & III les dépenſes 8135 pouces cubes, & 5436 pouces cubes que fait un même orifice qui a 1 pouce de diamètre, ſous 9 pieds, & 4 pieds d'eau dans le réſervoir, on verra que ces dépenſes ſont ſenſiblement entr'elles dans le rapport de 3 à 2, qui eſt celui des racines des hauteurs. Nous chercherons encore pourquoi cette proportion n'a pas lieu en toute rigueur.

356. Il ſuit des deux articles précédens qu'*en général les quantités d'eau dépenſées, durant le même temps, par différentes ouvertures, ſous différentes hauteurs dans le réſervoir, ſont entr'elles en raiſon composée des aires des ouvertures, & des racines quarrées des hauteurs des réſervoirs.* Car ſi l'on nomme Q & q les quantités d'eau dépenſées durant le même temps, par deux ouvertures o & O, ſous une même hauteur de réſervoir, q & Q' les quantités d'eau dépenſées, durant le même temps, par la même ouverture O, ſous deux hauteurs différentes h & H de réſervoir ; on aura, en vertu des deux articles précédens,

$$Q : q :: o : O,$$
$$q : Q' :: \sqrt{h} : \sqrt{H},$$

proportions qui étant multipliées par ordre, donnent $Q : Q' :: o\sqrt{h} : O\sqrt{H}$.

Cette règle générale eſt ſuffiſamment exacte pour les beſoins ordinaires de la pratique. Mais lorſqu'on voudra déterminer les écoulemens avec toute la juſteſſe poſſible, il faudra avoir égard aux remarques que nous ferons ci-deſſous.

357. Il n'eſt queſtion dans tout ceci, comme on voit, que d'orifices petits en comparaiſon de l'amplitude du réſervoir. Car le plus grand que j'aye employé, étant un quarré qui a 2 pouces de côté, tandis que la baſe du réſervoir eſt un quarré qui a 3 pieds de côté, la ſurface du premier quarré eſt à celle du ſecond, comme 1 eſt 324. Les mêmes réſultats auroient encore lieu pour de plus grands orifices par rapport à l'amplitude du réſervoir. Il y a néanmoins dans ce rapport une limite, paſſé laquelle de grands orifices donneroient moins qu'ils ne doivent donner, ſuivant la règle précédente, comparativement à d'autres plus petits. Je déterminerai dans la ſuite cette limite.

358. Voyons maintenant ſi l'expérience s'accorde avec la théorie.

Nous avons trouvé (245) qu'en nommant θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur donnée a, Q la quantité d'eau qui ſort pendant un temps donné t, par un petit orifice K, ſous une hauteur conſtante h de réſervoir, on a $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$. De même, en déſignant, pour un ſecond réſervoir, les quantités analogues à Q, K, h par les mêmes lettres accentuées, & ſuppoſant que les temps des écoulemens ſoient égaux, on aura $Q' = \frac{2tK'\sqrt{ah'}}{\theta}$. Donc $Q : Q' :: \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta} : \frac{2tK'\sqrt{ah'}}{\theta} :: K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$, proportion qui revient à celle de l'article 356. La

théorie

théorie & l'expérience s'accordent donc à faire voir que les dépenſes faites en temps égaux par différentes ouvertures, ſont comme les produits de ces ouvertures par les racines des hauteurs des réſervoirs.

359. Mais quoique les dépenſes effectives ſuivent ainſi entr'elles, au moins ſenſiblement, la même raiſon qui exiſte entre les dépenſes naturelles & théoriques, on ne doit pas conclure que les premières ſoient égales aux ſecondes. Car une telle concluſion ſeroit très-fauſſe, comme on le va voir.

Cherchons par la formule $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$ la dépenſe que feroit en 1 minute un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, ſous 9 pieds de hauteur d'eau dans le réſervoir, ſi le fluide ſortoit perpendiculairement au plan de l'orifice, & qu'aucun obſtacle n'en altérât l'écoulement naturel. En faiſant $a =$ 15 pieds, $\theta =$ 1 ſeconde, nous trouverons $Q =$ 13144 pouces cubes environ. Or ſuivant l'expérience (350), la dépenſe que fait réellement l'ouverture propoſée n'eſt que de 8135 pouces cubes. Ainſi il s'en faut beaucoup que la dépenſe effective n'égale la dépenſe théorique. La première eſt à la ſeconde, à-peu-près comme 100 eſt à 161, 57, rapport qui diffère peu de celui de 5 à 8. Ce même rapport a lieu auſſi, à-peu-près dans tous les autres cas.

360. Deux cauſes, le frottement & la contraction de la veine fluide, concourent à diminuer la dépenſe. L'effet de la première eſt peu ſenſible ; le déchet

de la dépenſe doit être attribué preſque entièrement à la contraction de la veine. De plus il faut obſerver que ce déchet ne vient pas de quelque diminution, au moins ſenſible, dans la vîteſſe du fluide au ſortir de l'orifice. Car,

1°. Suivant la théorie (237) la vîteſſe au ſortir de tout orifice très-petit en comparaiſon de la largeur du réſervoir eſt dûe à la hauteur entière du fluide dans le réſervoir au-deſſus de cet orifice.

2°. L'expérience des jets d'eau qui, (lorſqu'ils ſortent par des orifices percés dans de minces parois), s'élèvent preſque à la hauteur de leurs réſervoirs, & à qui la réſiſtance de l'air fait encore perdre quelque choſe de leur hauteur, montre que la vîteſſe au ſortir de l'orifice n'eſt pas ſenſiblement altérée.

361. Il ſuit de-là qu'ôn pourra déterminer d'une manière exacte & conforme à l'expérience, par la théorie de l'article 244, les écoulemens des fluides qui ſortent de vaſes entretenus conſtamment pleins, par de petits orifices, en diminuant ſimplement l'aire véritable de l'orifice dans le rapport de 8 à 5 à-peu-près, ſans faire aucun changement dans les autres données du problême.

362. On voit encore par-là que le rapport de l'aire de l'orifice à l'aire de la ſection de la veine contractée, tel que la meſure immédiate du diamètre de la veine nous la donné dans le chapitre précédent, eſt ſenſiblement moindre qu'on ne le trouve par les dépenſes. Celui de 141 à 100, donné par

Newton, eſt abſolument défectueux. Le nôtre, celui de 150 à 100, eſt encore trop foible. Nous avons pris le diamètre de la veine contractée un peu trop grand. Mais ſi l'on fait attention que le frottement contre les bords de l'orifice ralentit le mouvement des particules qui contribuent le plus à la contraction, on verra que le diamètre de la veine contractée, doit réellement être un peu plus grand que la dépenſe ne le donne.

363. Les écoulemens qui ſe font par des ouvertures latérales de hauteur ſenſible par rapport à celle du réſervoir, ſont également ſujets à l'effet de la contraction. Elle diminue toujours la dépenſe théorique dans le rapport de 8 à 5 environ. Ainſi lorſqu'on voudra appliquer la théorie de l'article 249 à la pratique, on ne doit pas oublier d'y faire cette correction.

364. Nous n'avons fait (360) qu'indiquer en général & d'une manière vague, les effets du frottement & de la contraction. Ils ſe mêlent & ſe compliquent enſemble, de telle ſorte qu'il eſt très-difficile de les ſéparer & d'aſſigner préciſément à chacun ſon partage. Tâchons cependant de faire, du moins juſqu'à un certain point, cette ſéparation. Je commence par le frottement.

365. Il paroît évident que ſous une même hauteur d'eau dans le réſervoir, la veine doit ſe contracter de la même manière au ſortir de deux orifices de même eſpèce, inégaux en ſurfaces, & très-petits l'un & l'autre en comparaiſon de l'amplitude

du réſervoir. Du moins s'il y a alors quelque différence dans la contraction, elle ne peut être que très-légère, ou comme infiniment petite. Ainſi on peut ſuppoſer en ce cas que le frottement eſt la ſeule cauſe qui produiſe quelque différence, s'il y en a, dans le rapport que les dépenſes devroient ſuivre entr'elles. Or, quelle que puiſſe être la nature de cette force, il eſt clair que plus il y a de points qui frottent contre le bord de l'orifice, comparativement à l'étendue de ſa ſurface, plus le déchet de la dépenſe, occaſionné par le frottement, doit être ſenſible. Ainſi, de deux orifices ſemblables & inégaux, le plus petit doit donner moins à proportion que l'autre; car le rapport des périmètres varie moins que celui des ſurfaces. Si l'on conſidère, par exemple, deux orifices circulaires dont l'un ait 1 pouce de diamètre, l'autre 2 pouces auſſi de diamètre, on verra que le premier doit donner moins d'eau à proportion que le ſecond, parce que le périmètre du premier étant la moitié du périmètre du ſecond, tandis que les ſurfaces ſont ſeulement dans le rapport de 1 à 4, il eſt clair que relativement aux ſurfaces, le premier orifice préſente plus de points à l'action du frottement que n'en préſente le ſecond. C'eſt ce que l'expérience confirme, comme on peut le voir dans chacune de nos tables. Nous pouvons donc établir cette régle générale. *Le frottement eſt cauſe que de pluſieurs orifices ſemblables, les petits donnent moins à proportion que les grands, ſous une même hauteur d'eau dans le réſervoir.*

366. Des mêmes remarques ſuit cette autre régle. *De plusieurs orifices d'égale ſurface, celui dont le périmétre eſt le moindre, doit à cauſe du frottement, donner plus d'eau que les autres, ſous une même hauteur de réſervoir.* Ainſi les orifices circulaires ſont à cet égard les plus avantageux de tous. Car on ſçait que de toutes les figures iſoperimètres, le cercle eſt celle qui a la plus grande ſurface; ou ce qui revient au même, la circonférence du cercle eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on peut choiſir pour enfermer un eſpace donné.

367. Suppoſons maintenant deux orifices égaux & ſemblables, mais inégalement éloignés de la ſurface de l'eau dans le réſervoir. Soient H & h ces diſtances, & prenons $H > h$. Puiſque dans les deux cas il y a le même nombre de points qui frottent; s'il y a quelques différences dans les frottemens, elles ne peuvent être que relatives aux hauteurs H & h. Mais d'un autre côté, comme la contraction de la veine fluide peut n'être pas la même pour un même orifice, ſous différentes hauteurs d'eau dans le réſervoir, il eſt impoſſible de décider ſi le frottement a quelque part aux variations qui ſe trouvent dans la proportion des dépenſes, à moins qu'on ne connoiſſe par quelque théorie, la nature de cette réſiſtance. Or, parmi les différentes hypothèſes qu'on peut propoſer à ce ſujet, en voici deux qui ont l'avantage d'être fort ſimples, & dont la ſeconde ne paroît pas devoir s'écarter beaucoup de la vérité. Il s'agit toujours de l'action *moyenne* du frottement, diſtribuée

à l'aire entière de l'orifice. Mais il eſt clair qu'il n'eſt pas le même dans toute cette étendue, & qu'occaſionné par le mouvement des particules qui gliſſent immédiatement ſur l'arrête de l'orifice, il doit diminuer de proche en proche de la circonférence au centre.

368. Imaginons, en premier lieu, que le frottement ſoit proportionnel à la preſſion ou à la hauteur du fluide dans le réſervoir. Cette force étant ſuppoſée repréſentée par F ſous une hauteur *donnée* L, elle ſera $\frac{F}{L} \times H$ ſous la hauteur H, & $\frac{F}{L} \times h$ ſous la hauteur h. Donc la force qui produit l'écoulement ſous la hauteur H pourra être repréſentée par $H - \frac{F}{L} \times H$, tandis que la force qui produit l'écoulement ſous la hauteur h le ſera par $h - \frac{F}{L} \times h$. Or on a évidemment la proportion, $H - \frac{F}{L} \times H : h - \frac{F}{L} \times h :: H : h$. Par conſéquent, les deux dépenſes par l'orifice propoſé, en ayant égard au frottement, ſeroient entr'elles comme s'il n'y avoit pas de frottement. Ainſi dans cette première hypothèſe, le frottement ne contribueroit en rien à changer le rapport des dépenſes par un même orifice ſous différentes hauteurs de réſervoir. Mais cette hypothèſe ſouffre quelque difficulté. Pourquoi en effet le frottement ſuivroit-il la raiſon des hauteurs ou des quarrés des vîteſſes ? Il eſt indubitable que plus il y a de points

qui frottent en un temps donné, plus l'effet du frottement eſt grand. Mais cela paroît ſuppoſer que le frottement eſt proportionnel à la ſimple vîteſſe; & on ne voit pas pourquoi il renfermeroit dans ſon expreſſion le quarré de cette vîteſſe. Il ne le renferme point pour les corps ſolides. La loi paroît devoir être à-peu-près la même dans les deux cas.

369. Je ſuppoſe donc, en ſecond lieu, que le frottement ſoit proportionnel à la vîteſſe ou à la racine de la hauteur du fluide dans le réſervoir. En ce cas, la force qui produit l'écoulement ſous la hauteur H eſt $H - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{H}$, & la force qui produit l'écoulement ſous la hauteur h, eſt $h - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{h}$. Or puiſque $H > h$, on a $H - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{H} : h - \frac{F}{\sqrt{L}} \times \sqrt{h} > H : h$, comme on le voit en obſervant que le produit des extrêmes eſt plus grand que le produit des moyens. Donc, dans cette hypothèſe, le frottement doit être moins ſenſible à la plus grande hauteur H qu'à la plus petite h. La variation qui réſulte de-là dans le rapport des dépenſes eſt extrêmement petite pour des orifices percés dans de minces parois; mais elle peut ſe faire remarquer ſur des tuyaux d'une certaine longueur. L'expérience apprend en effet, comme nous le verrons ci-deſſous, que ſous différentes hauteurs de réſervoirs un même tuyau donne plus à proportion pour les grandes hauteurs que pour les pe-

tites ; ce qui prouve la justesse de l'hypothèse dont il s'agit.

370. Cela posé, voyons ce que les expériences rapportées ci-dessus nous indiquent au sujet des variations dans le rapport des dépenses que fait un même orifice sous différentes hauteurs d'eau dans le réservoir. Si l'on compare entr'elles, à l'aide de nos trois tables, les dépenses d'un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, sous les trois hauteurs 11 pieds 8 pouces 10 lignes, 9 pieds, 4 pieds ; on trouvera que proportion gardée des hauteurs, la dépense est plus grande pour une petite hauteur que pour une grande. Or ce résultat est précisément contraire à celui qu'on tireroit de l'article précédent, si la variation dont il s'agit, étoit produite par le frottement. Concluons donc que cette même variation n'est pas dûe au frottement ; mais qu'elle a pour cause une plus ou moins grande contraction de la veine, à mesure que la hauteur du fluide dans le réservoir est plus ou moins grande. Cette explication me paroît hors de doute. Car puisque les particules pressent perpendiculairement le plan de l'orifice lorsqu'il est encore bouché, & que quand on vient à l'ouvrir, la contraction est produite par le mouvement oblique des particules latérales ; plus ce mouvement est grand, ou plus la hauteur du fluide dans le réservoir est grande, & plus aussi la veine fluide doit se resserrer. Nous pouvons donc établir cette règle. *En vertu d'une lègere augmentation que la contraction de la veine subit à mesure que la hauteur du*

fluide dans le réservoir augmente, la dépense doit un peu diminuer. Cet effet est un peu contrarié par le frottement ; mais ici l'action de cette dernière force doit être négligée.

371. En modifiant les résultats théoriques à l'aide des observations précédentes, on trouvera les dépenses avec une précision qu'on ne pousse jamais si loin dans la pratique ordinaire, mais qui plaît toujours à l'esprit, même alors qu'il néglige d'en faire usage. Eclaircissons cela par un exemple.

Supposons qu'on ait un réservoir entretenu constamment plein à la hauteur de 5 pieds au-dessus d'un orifice de 9 lignes de diamètre, percé dans une mince paroi : on demande la quantité effective d'eau que cet orifice donnera en 1 minute.

Je cherche d'abord par la formule de l'article 245, sans faire aucune correction à l'orifice, la dépense naturelle de ce même orifice, & je trouve qu'en 1 minute elle est de 5510 pouces cubes. Ensuite je cherche de même la dépense naturelle par un orifice de 6 lignes de diamètre, sous 4 pieds de hauteur d'eau dans le réservoir; cette dépense est de 2191 pouces cubes, tandis que la dépense effective correspondante est seulement de 1353 pouces cubes (352). Or il est évident que les deux dépenses naturelles qu'on vient de déterminer, doivent être entr'elles, à très-peu de chose près, comme les deux dépenses effectives correspondantes. Car en concluant de la hauteur de 4 pieds à la hauteur de 5 pieds, la dépense effective est un peu augmentée; mais aussi en

concluant d'un orifice de 6 lignes de diamètre à un orifice de 9 lignes de diamètre, la dépenſe eſt un peu diminuée ; ce qui produit une compenſation, & ne peut pas manquer d'établir entre les dépenſes effectives un rapport très-approchant du véritable. Faiſant donc cette proportion, 2191 : 1353 : : 5510 pouces cubes : un quatrième terme, ce quatrième terme 3402 pouces cubes eſt la dépenſe demandée.

On procédera de la même manière dans les autres queſtions de cette eſpèce. On ſe procurera des compenſations pareilles à celles de l'exemple précédent.

372. Voici encore une remarque qui peut avoir ſon application dans la pratique.

Pour m'expliquer ſur un exemple, je ſuppoſe que ſous une même hauteur conſtante de 4 pieds dans le réſervoir on ait deux orifices, l'un de 1 pouce de diamètre, l'autre inconnu & tel que ſa dépenſe doive être préciſément le quart de la dépenſe du premier, dans le même temps : il s'agit de ſçavoir quel doit être le diamètre de ce ſecond orifice.

Il eſt clair que s'il n'y avoit pas de cauſe de retard, & que les petites ouvertures donnaſſent autant à proportion que les grandes, l'orifice cherché devroit avoir 6 lignes de diamètre. Mais comme les petits orifices donnent un peu moins à proportion que les grands, l'orifice en queſtion doit avoir un peu plus de 6 lignes de diamètre, & je le détermine ainſi.

On a vu (352) que ſous la hauteur conſtante de

4 pieds d'eau dans le réſervoir, un orifice de 1 pouce de diamètre donne en 1 minute, 5436 pouces cubes d'eau. Prenons le quart de cettte quantité, & nous aurons 1359 pouces cubes pour la dépenſe de l'orifice cherché. Or (352) un orifice de 6 lignes de diamètre dépenſe en 1 minute, 1353 pouces cubes. Ces deux dépenſes diffèrent peu l'une de l'autre. Donc les deux orifices diffèrent peu, & à plus forte raiſon leurs périmètres diffèrent encore moins à proportion de leurs grandeurs. Ainſi l'inégalité produite par le frottement dans ces deux orifices, doit être comme infiniment petite. Si donc on fait cette proportion, 1353 : 1359 :: 36 : un quatrième terme, ce quatrième terme exprimera en lignes quarrées le quarré du diamètre de l'orifice demandé. En achevant le calcul, je trouve que l'orifice cherché doit avoir environ 6, 014 lignes de diamètre. L'excès de ce diamètre ſur 6 lignes eſt inſenſible. Mais il y a des cas où ces ſortes d'excès ne doivent pas être négligés. On y appliquera alors la méthode dont je viens de me ſervir.

373. Nous avons adopté (249) la règle ordinaire que dans les écoulemens par des orifices verticaux ou inclinés, dont les hauteurs ſont ſenſiblement comparables à celles des réſervoirs, les vîteſſes des différens filets ſont égales à celles qu'acquerroit un corps grave en tombant des hauteurs correſpondantes de la ſurface de l'eau. Mais nous nous ſommes propoſés alors de la vérifier par l'expérience. Voici cet examen.

Suppoſons un orifice circulaire & vertical, de 1 pouce de diamètre, dont le centre eſt conſtamment éloigné de 7 lignes, de la ſurface de l'eau, comme dans l'article 353. Je trouve par la formule de l'article 256 qu'en 1 minute la dépenſe naturelle devroit être d'environ 966 pouces cubes. Or ſuivant l'expérience, la dépenſe effective eſt de 628 pouces cubes ſeulement. Maintenant, ſi l'on cherche avec les précautions que j'ai indiquées, la dépenſe effective par un orifice horiſontal de 1 pouce de diamètre, diſtant de la ſurface de l'eau, d'une quantité égale à la hauteur moyenne déterminée dans l'article 257, on trouvera que cette dépenſe effective eſt auſſi de 628 pouces cubes à très-peu-près. On voit donc par la comparaiſon de la dépenſe naturelle avec la dépenſe effective que la règle dont il s'agit eſt à-peu-près auſſi exacte que celle par laquelle nous avons déterminé (244) la dépenſe par un petit trou horiſontal ou latéral, dont tous les points peuvent être cenſés également éloignés de la ſurface du fluide. Mais il faut pour cela que l'orifice vertical ou incliné (quoique d'une grandeur ſenſible) ne ſoit pas fort conſidérable par rapport à l'amplitude du réſervoir; & que de plus la ſurface de l'eau dépaſſe le bord ſupérieur de l'orifice (259).

J'ai trouvé la même choſe par d'autres expériences faites avec des orifices rectangulaires & verticaux; je ne les rapporte pas, parce qu'elles n'apprennent d'ailleurs rien de nouveau.

374. Je finis par donner ici une table compara-

tive de la dépenſe naturelle avec la dépenſe effective, pour un orifice de 1 pouce de diamètre, ſous différentes hauteurs de réſervoir. Les dépenſes effectives qui n'ont pas été trouvées immédiatement par l'expérience, ont été déterminées avec les précautions que j'ai indiquées (371 & 372); & toutes doivent être regardées comme auſſi exactes, à peu de choſe près, que ſi elles avoient été données par des expériences directes. Par le moyen de cette table & des régles précédentes, on déterminera facilement les dépenſes par d'autres orifices percés dans de minces parois, & ſous d'autres hauteurs de réſervoir. On trouvera ci-deſſous pluſieurs uſages de cette table. En voici d'avance une application.

Il s'agit de trouver la dépenſe que fera en 1 minute un orifice de 3 pouces de diamètre, ſous 30 pieds de hauteur de réſervoir?

Les dépenſes naturelles de deux orifices, en temps égaux, étant comme les produits de ces orifices par les racines des hauteurs des réſervoirs (358), & la dépenſe naturelle d'un orifice de 1 pouce de diamètre, ſous 15 pieds de hauteur de réſervoir, étant, ſelon notre table, de 16968 pouces cubes en 1 minute; on aura la proportion, $1\sqrt{15} : 9\sqrt{30} ::$ 16968 pouces cubes : un quatrième terme 215961 pouces cubes, dépenſe naturelle de l'orifice propoſé. Diminuant cette dépenſe dans le rapport de $8\frac{1}{10}$ à 5, à cauſe de la contraction, on aura 133309 pouces cubes pour la dépenſe effective du même orifice.

Hauteurs constantes de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'orifice, exprimées en pieds.	Dépense naturelle, en 1 minute, par un orifice de 1 pouce de diamètre, exprimée en pouces cubes.	Dépense effective pendant le même temps, par le même orifice, exprimée aussi en pouces cubes.
1	4381	2722
2	6196	3846
3	7589	4710
4	8763	5436
5	9797	6075
6	10732	6654
7	11592	7183
8	12392	7672
9	13144	8135
10	13855	8574
11	14530	8990
12	15180	9384
13	15797	9764
14	16393	10130
15	16968	10472

§. II. *Ecoulemens par des tuyaux additionnels.*

375. Lorſque l'eau ſort d'un vaſe par un orifice percé dans une mince paroi, la contraction à laquelle la veine fluide eſt toujours ſujette, diminue conſidérablement la dépenſe, comme nous l'avons vû. Examinons s'il en ſera de même, lorſque l'eau s'écoulera par un bout de tuyau additionnel dont elle ſuive les parois. Je vais expoſer mes recherches ſur ce ſujet dans l'ordre qu'elles ſe ſont ſuccédées les unes aux autres.

376. Mon premier objet ayant été de comparer enſemble les dépenſes dans les deux cas, j'ai voulu d'abord déterminer la dépenſe d'un tuyau additionnel de 2 pouces de diamètre, pour en faire la comparaiſon avec celle d'un orifice de 2 pouces auſſi de diamètre, percé dans une mince paroi. En conſéquence, j'ai fait adapter au fond du réſervoir *ADCB* (Fig. 13) un tube cylindrique vertical *MOPN* de Fig. 13.
cuivre bien poli en dedans, qui avoit 2 pouces de diamètre & 2 pouces de hauteur. Ce tuyau étant bouché par le moyen d'un tampon, & le réſervoir étant rempli d'eau à la hauteur de 11 pieds 8 pouces 10 lignes au-deſſus de *MN*, lorſqu'on a ôté le tampon pour permettre l'écoulement, l'eau n'a pas ſuivi les parois du tuyau, & la veine s'eſt contractée comme ſi l'orifice avoit été percé dans une mince plaque. On voyoit l'eau gliſſer ſur l'arrête de la baſe ſupérieure du tube, préciſément de la même manière que dans les expériences précédentes. Vaine-

ment on a tenté d'en changer le cours. Il n'a pas été poſſible de la déterminer à ſuivre les parois du tuyau. Je ne pouvois donc parvenir à mon but avec un tuyau de ce diamètre qu'en lui donnant plus de longueur; mais outre qu'alors je prévoyois quelque difficulté à faire bien exactement l'expérience à cauſe de la grande dépenſe du tuyau, je n'ai pas tenté de la faire, parce que d'ailleurs un allongement dans le tuyau auroit pu occaſionner un frottement ſenſible que je voulois éviter dans cette recherche. Ces raiſons m'ont déterminé à employer un tuyau d'un plus petit diamètre. On a donc appliqué au fond du réſervoir un tuyau cylindrique vertical, auſſi de cuivre bien poli en dedans, de 1 pouce de diamètre & de 2 pouces de hauteur. Après avoir fait remplir le réſervoir comme ci-devant, lorſqu'on a ôté le tampon qui bouchoit le tuyau, l'eau a ſuivi ſes parois & s'eſt écoulée à gueulebée. On a donc pu déterminer la dépenſe par ce tuyau, & la comparer avec celle d'un orifice de 1 pouce de diamètre, percé dans une mince paroi. Mais en répétant pluſieurs fois cette expérience, il s'en eſt préſenté une autre d'une eſpèce aſſez ſingulière qui a fourni le moyen de faire la comparaiſon indiquée, avec toute la préciſion dont elle eſt ſuſceptible.

377. Comme la violence de l'eau ne permettoit pas de boucher facilement le tuyau en dehors, j'ai
Fig. 14. penſé à ſuſpendre l'écoulement (Fig. 14) par le moyen d'une petite planche *K* attachée d'équerre à l'extrémité d'une longue perche *R*, & couverte de

pluſieurs

plusieurs lambeaux de feutre. Il n'étoit pas difficile d'appliquer cette planche sur l'ouverture supérieure du tuyau. Or quand on la retiroit pour donner lieu à l'écoulement, tantôt l'eau suivoit les parois du tube, tantôt elle s'en détachoit, & la veine se resserroit comme ci-dessus. Avec un peu d'exercice on est parvenu à produire à volonté l'un ou l'autre effet. Le même phénomène a eu lieu après que la hauteur du tuyau a été réduite à 1 pouce 6 lignes, avec cette différence néanmoins qu'on ne réussissoit pas aisément à faire alors ensorte que l'eau suivît les parois du tuyau. Elle les auroit encore moins suivis, & peut-être auroit-il été impossible de l'y déterminer, si le tuyau n'avoit eu que 1 pouce de hauteur. Il est du moins certain qu'ayant fait réduire la hauteur du tuyau à $\frac{1}{2}$ pouce, l'eau s'est toujours détachée des parois, & que jamais on n'a pu la forcer à les suivre, même en présentant le tampon à l'orifice inférieur, ou en y appliquant le plat de la main. Quoi qu'il en soit, la commodité de pouvoir faire sortir l'eau à plein tuyau, ou de la faire simplement glisser sur son bord supérieur, quand le tuyau n'a que 18 lignes de hauteur, a cela d'avantageux que l'orifice d'entrée étant exactement le même dans les deux cas, & le tuyau étant d'ailleurs parfaitement cylindrique, l'une des sources d'erreur dans le rapport des dépenses, celle qui tient aux imperfections inévitables dans les grandeurs des orifices, disparoît ici presque totalement. On n'a point à craindre d'ailleurs que la hauteur du tuyau puisse donner lieu à un frottement

qui trouble d'une manière ſenſible le rapport cherché : car elle eſt fort petite par rapport à celle que nous donnerons au réſervoir.

378. Ces opérations préliminaires poſées ; pour remplir non-ſeulement mon premier objet, mais encore pour comparer enſemble les dépenſes par des tuyaux de même diamètre & de différentes hauteurs, j'ai fait mettre au fond du réſervoir *ADCB* un tuyau cylindriqne vertical, bien poli en-dedans, qui a 1 pouce de diamètre intérieur, & dont la hauteur d'abord de 4 pouces a été diminuée ſucceſſivement. Dans les trois premières expériences qui ſuivent, l'eau ſort à plein tuyau ; & dans la quatrième j'ai fait enſorte qu'elle en abandonnât les parois.

EXPÉRIENCES I, II, III, IV.

379. L'eau du réſervoir eſt entretenue, dans tous les cas, à la hauteur conſtante de 11 pieds 8 pouces 10 lignes au-deſſus de la baſe ſupérieure *MN*

Fig. 13. du tuyau *MOPN* (Fig. 13).

I. Le tuyau ayant 4 pouces de hauteur, & l'eau en ſuivant les parois, en 66 ſecondes on reçoit 8 pieds cubes d'eau — 323 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 13501 pouces cubes.

II. Le tuyau ayant 2 pouces de hauteur, & l'eau en ſuivant les parois, en 66 ſecondes on reçoit 8 pieds cubes d'eau — 417 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 13407 pouces cubes.

III. Le tuyau ayant 1 pouce 6 lignes de hauteur, & l'eau en ſuivant les parois, en 66 ſecon-

des on reçoit 8 pieds cubes d'eau — 439 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 13385 pouces cubes.

IV. Le tuyau ayant 1 pouce 6 lignes de hauteur, comme dans l'expérience précédente, mais l'eau ne faiſant plus que gliſſer ſur l'arrête de ſa baſe ſupérieure, en 91 ſecondes on reçoit 8 pieds cubes d'eau + 254 pouces cubes, c'eſt-à-dire, en tout 14078 pouces cubes.

Reſultat de ces expériences.

380. Ces expériences donnent la table ſuivante.

La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de la baſe ſupérieure du tuyau, eſt de 11 pieds 8 pouces 10 lignes; & le diamètre du tuyau eſt de 1 pouce.	Hauteurs variables du tuyau, exprimées en lignes.		Nombre de pouces cubes d'eau dépenſés en 1 min.
	48	L'eau ſort à plein tuyau.	12274
	24		12188
	18		12168
	18	L'eau ne ſuit pas les parois.	9282

RÉFLEXIONS.

381. Lorſque l'eau ſort par un tuyau vertical, comme dans les trois premières expériences qui précédent; plus le tuyau eſt long, plus la dépenſe eſt grande. Les différentes dépenſes ſuivent, à peu de choſe près, la raiſon des racines quarrées des hau-

teurs de l'eau dans le réservoir au-dessus de la base inférieure du tuyau. Mais il ne s'agit ici que de tuyaux qui ont de petites hauteurs en comparaison de celle du réservoir. Nous examinerons dans la suite le mouvement des eaux dans de longs tuyaux.

382. En comparant les quantités d'eau dépensées dans la troisième & la quatrième expérience, on voit que les deux dépenses 12168 pouces cubes & 9282 pouces cubes, sont entr'elles dans un rapport qui surpasse un peu celui de 13 à 10. Mais il faut remarquer que la hauteur de l'eau au-dessus de l'orifice de sortie n'est pas la même dans les deux cas; elle est plus grande dans le premier que dans le second. Le frottement le long des parois du tuyau doit un peu diminuer la dépense dans le premier cas, mais cette diminution est très-légère, & ne peut altérer qu'insensiblement le rapport des deux dépenses proposées.

383. Je néglige donc une telle altération; & pour comparer ensemble les deux dépenses sous une même hauteur de réservoir, j'observe que dans la troisième expérience la hauteur de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'orifice de sortie = 11 pieds 8 pouces 10 lignes + 18 lignes = 1708 lignes; & que dans la quatrième la hauteur du réservoir = 11 pieds 8 pouces 10 lignes + 6 lignes = 1696 lignes, parce que la section de la veine contractée est distante d'environ 6 lignes du fond du réservoir. Ainsi pour réduire la dépense de la quatrième expérience à la valeur qu'elle doit avoir sous 1708 lignes de

hauteur dans le réservoir, on fera (355) la proportion $\sqrt{1696} : \sqrt{1708} :: 9282$ pouces : à la dépense cherchée $= 9314$ pouces cubes. Il s'en faut peu que les deux dépenses 12168 pouces cubes & 9314 pouces cubes ne soient maintenant entr'elles dans le rapport de 13 à 10.

384. Nous avons trouvé (359) que la dépense naturelle & théorique est à la dépense affectée de la contraction ordinaire qui a lieu à la sortie des orifices percés dans de minces parois, environ comme 8 est à 5, ou comme 16 est à 10; & nous venons de voir que la dépense par un tuyau additionnel est à la dépense affectée de la contraction ordinaire, comme 13 est à 10. Concluons donc que *l'orifice de sortie étant le même, la dépense naturelle, la dépense par un tuyau additionnel, la dépense par un orifice percé dans une mince paroi, sont entr'elles, à peu de chose près, comme les trois nombres* 16, 13, 10. Ces rapports sont assez exacts pour la pratique.

385. De-là résulte une conséquence analogue à l'article 361. Les écoulemens par des tuyaux additionnels, de quelques pouces de hauteur, pourront se déterminer par la méthode théorique de l'article 244, en diminuant l'aire véritable de l'orifice extérieur dans le rapport de 16 à 13, & prenant pour hauteur du réservoir la verticale comprise depuis le centre de cet orifice jusqu'à la surface supérieure de l'eau, prolongée lorsqu'il est nécessaire.

386. On voit encore par-là que les tuyaux additionnels ne détruisent qu'en partie la contraction. En effet,

il eſt clair que le fluide ne peut paſſer du réſervoir dans ces tuyaux, ſans que les particules latérales ne prennent des directions obliques. Seulement l'obliquité de ces mouvemens eſt alors un peu diminuée, comme je l'expliquerai ci-deſſous. En général toutes les fois qu'un fluide mu dans un vaſe quelconque qui a des inégalités dans ſa groſſeur, paſſe d'un endroit à un autre plus étroit, il y a néceſſairement une contraction plus ou moins grande ſuivant les différens cas. La plus ſenſible de toutes, & que par cette raiſon j'appellerai toujours *contraction de la première eſpèce*, eſt celle qui a lieu au ſortir d'un petit orifice percé dans une mince paroi d'un grand réſervoir.

387. Comme la veine fluide, dans le cas où elle ſort à plein tuyau, a la forme cylindrique à ſa ſortie, ou qu'elle eſt alors perpendiculaire au plan de
Fig. 13. l'orifice extérieur (Fig. 13), il eſt évident que le déchet de la dépenſe ne peut pas être attribué à une contraction extérieure, mais que ſa vraie cauſe eſt que la vîteſſe du fluide en OP n'eſt pas dûe à la hauteur entière KO du réſervoir. Soient h la hauteur à laquelle la vîteſſe en OP eſt dûe, K l'aire de l'orifice OP, Q la quantité d'eau écoulée pendant le temps donné t, θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur a : on trouvera, comme dans l'article 244, $Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{\theta}$, & par conſéquent $h = \frac{Q^2\theta^2}{4K^2t^2a}$. Donc en faiſant, comme dans la

troisième expérience, $Q = 12168$ pouces cubes, $t = 60$ secondes, $K = 36 \times \frac{355}{113}$ lignes quarrées, & de plus $a = 15$ pieds $= 2160$ lignes, $\theta = 1$ seconde; on aura $h = 1111$ lignes. Or la hauteur $KO = 1708$ lignes. Ainsi la hauteur h est à la hauteur de l'eau dans le réservoir, comme 1111 est à 1708, ou comme 100 est à 153, 73 environ, ou comme 2 est à 3, à-peu-près.

388. Donc les jets d'eau qui sortent par des tuyaux additionnels doivent s'élever moins haut que ceux qui sortent par des orifices percés dans de minces parois. Car ceux-ci, abstraction faite de la résistance de l'air, s'éleveroient sensiblement à la hauteur de leurs réservoirs. Cette conclusion est confirmée par l'expérience, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

389. Que le tuyau *MOPN* soit vertical, comme dans la Figure 13, ou horisontal comme dans la Fig. 15, il donnera la même quantité d'eau, pourvu qu'il ait toujours la même longueur, & que l'orifice extérieur *OP* soit placé à la même profondeur au-dessous de la surface de l'eau dans le réservoir. J'ai employé dans les expériences précédentes un tuyau vertical, parce que je voulois connoître aussi les rapports des dépenses à mesure que ce tuyau est plus ou moins long. Fig. 15. & 15.

390. Supposons maintenant que l'eau sorte par un tuyau conique *MOPN* (Fig. 16) dont la plus grande base *MN* est du côté du réservoir. La forme de ce tuyau facilite l'entrée de l'eau en *MN*; & Fig. 16.

pourvu qu'il ne ſoit pas trop évaſé, il doit donner plus que le tuyau cylindrique *mOPn* qui a le même orifice extérieur *OP*. M. Poleni en a fait l'expérience dans ſon Traité *de Caſtellis*. Ayant adapté horiſontalement à un réſervoir entretenu plein à la même hauteur conſtante de 256 lignes au-deſſus du centre de l'orifice, un tuyau conique qui avoit 92 lignes de longueur, 33 lignes de diamètre à ſon orifice du côté du réſervoir, 26 lignes de diamètre à l'orifice extérieur; enſuite un tuyau cylindrique qui avoit 91 lignes de longueur, 26 lignes de diamètre: il a trouvé que pour remplir un même vaſe ou étalon qui contenoit 73035 pouces cubes, le tuyau conique employoit 2′ 57″, & le tuyau cylindrique 3′ 7″. En faiſant ſortir l'eau par un orifice de 26 lignes de diamètre, percé dans une mince paroi, il falloit 4′ 36″ pour remplir l'étalon.

391. Cet Auteur compare auſſi entr'eux les écoulemens par des tuyaux coniques qui ont même longueur, même orifice extérieur, mais différens orifices du côté du réſervoir. La longueur commune des tuyaux qu'il employe eſt de 92 lignes, & le diamètre de chaque orifice extérieur, de 26 lignes. Les diamètres des orifices intérieurs ſont reſpectivement de 33, 42, 60, 118 lignes. L'eau étant entretenue dans le réſervoir toujours à même hauteur; par le premier tuyau, l'étalon propoſé ſe remplit en 2′ 57″; par le ſecond, en 2′ 58″; par le troiſième, en 3′; par le quatrième, en 3′ 5″.

392. Si l'on réduit toutes les dépenſes énoncées

dans les deux articles précédens, à notre manière de calculer, on trouvera que la hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir étant 256 lignes, en 1 minute, l'orifice percé dans une mince

paroi donne............ 15877 pouces cubes.
le tuyau cylindrique....... 23434
le premier tuyau conique.... 24758
le ſecond............... 24619
le troiſième............. 24345
le quatrième............ 23687.

La première dépenſe eſt moindre qu'on ne la concluroit de mes expériences; & en cela M. Poleni s'éloigne encore plus que moi du réſultat qu'on trouveroit d'après l'expérience que M. Mariotte a faite pour déterminer le pouce d'eau.

393. Sans examiner ſi M. Poleni a mis toute l'exactitude poſſible dans ſes opérations, & ſi en particulier ſon étalon n'étoit pas un peu défectueux par excès, comme je le préſume, bornons-nous à comparer enſemble les dépenſes de la table précédente, & concluons-en;

1°. Que la dépenſe effective eſt toujours moindre que la dépenſe naturelle qui eſt de 27425 pouces cubes en 1 minute.

2°. Qu'en élargiſſant juſqu'à un certain point l'orifice intérieur du tuyau, on augmente la dépenſe; mais qu'il ne faut pas porter cet élargiſſement trop loin, parce qu'il tend à produire une contraction extérieure, & à ramener l'écoulement à la claſſe de ceux

qui ſe font par des orifices percés dans de minces parois, & qui ſont les moindres de tous en dépenſe.

394. Si on mettoit le tuyau conique *MOPN* dans une autre poſition, enſorte que ſa plus petite baſe *OP* fût du côté du réſervoir & la plus grande en-dehors, il donneroit plus d'eau que le tuyau cylindrique *mOPn*, parce que la divergence des côtés *OM*, *PN* tend à faire diverger la veine, & par conſéquent à changer le mouvement oblique que les particules auroient à leur paſſage du réſervoir dans le tuyau. Mais on ſent que l'excès de la première dépenſe ſur la ſeconde a ſes limites qui ne peuvent pas être fort étendues. D'ailleurs ſi le tuyau conique, toujours placé comme on vient de le dire, n'a pas une certaine longueur par rapport au diamètre de ſa plus grande baſe, l'eau ne ſuivra pas ſes parois, & il y aura à ſon entrée contraction de la première eſpèce. Cela arrivera ſur-tout, s'il eſt adapté verticalement au fond du réſervoir.

395. De tous les tuyaux additionnels qu'on peut employer dans la vûe de ſe procurer la plus grande quantité d'eau qu'il eſt poſſible en un temps donné, le plus avantageux eſt celui qui a la forme que la veine fluide prend naturellement à la ſortie d'un orifice percé dans une mince paroi. Je m'explique. Soit
Fig. 17. *MSON* (Fig. 17) la pyramide tronquée ou le conoïde formé par la veine depuis l'orifice *MN* juſqu'à l'endroit *SO* où elle ceſſe de ſe reſſerrer pour commencer à prendre la forme cylindrique. Imagi-

nons que *MS*, *NO* deviennent les parois d'un tuyau *MSON*, lesquelles ne fassent que toucher la surface de l'eau sans gêner en aucune manière son mouvement. Il est clair que la vîtesse du fluide en *SO* étant dûe à la hauteur entière *rb* du réservoir (360), & que la section *SO* devant être considérée comme le vrai orifice par lequel se fait l'écoulement, la dépense effective au sortir de *SO* aura toute la plénitude possible, & sera égale à la dépense naturelle & théorique.

396. Cette remarque peut avoir son application à la pratique, lorsqu'il s'agit de dériver une certaine quantité d'eau d'une rivière, d'un aqueduc, &c, par un canal ou tuyau latéral. On imitera dans la construction de la partie antérieure de ce canal la forme *MSON*, & on fera l'autre partie, prismatique ou cylindrique. On doit se souvenir que l'aire *MN* est à l'aire *SO*, comme 8 est à 5 environ, & que la distance *rp* de *SO* à *MN* est égale, à peu près, à la demi-largeur *pM* ou *pN*. A l'égard des côtés *MS*, *NO*, ils sont sensiblement rectilignes. Leur figure exacte est comme indéterminable par la théorie.

397. Revenons aux tuyaux cylindriques, & examinons pourquoi ils donnent plus d'eau que les orifices percés dans de minces parois. Je commence par le cas le plus simple.

Soit *MOPN* un tuyau cylindrique horisontal, adapté au réservoir *ADCB* (Fig. 15). Concevons d'abord qu'avant l'écoulement ce tuyau soit bouché par une plaque appliquée contre *MN*, & qu'ensuite Fig. 15.

cette plaque ſoit anéantie ſubitement. La veine entrant par MN tend à ſe contracter, & les particules M, N décriroient ſans ceſſe les paraboles Mmx, Nny, ſi elles en avoient la liberté. Donc ſi le point P, extrémité du tuyau, ſe trouve entre les points N & y, il y aura contraction de la première eſpèce, & l'écoulement ſe fera comme ſi le tuyau n'avoit pour hauteur que l'épaiſſeur d'une mince paroi. Mais ſi le même point P ſe trouve en-delà de x, comme il eſt exprimé dans la figure, le choc de l'eau qui ſe fait en yx doit faire gonfler & répandre l'eau dans tout l'eſpace $MuxN$, & par conſéquent l'eau ſortira à plein tuyau. Le même gonflement aura lieu auſſi, quoiqu'avec un peu plus de difficulté, lorſque le point P ſe trouvera entre les points y & x. Dans l'un & l'autre cas, l'eau finit par s'attacher aux parois du tube vers ſa partie extérieure, & par remplir l'orifice entier OP. Or lorſque le fluide ſort ainſi à plein tuyau, il eſt viſible que les mouvemens naturels des particules M, N ſont altérés & deviennent moins obliques au plan de l'orifice MN. Donc en vertu de cette diminution d'obliquité il doit paſſer plus d'eau par MN que ſi la longueur du tuyau étoit infiniment petite. Donc le tuyau $MOPN$ doit donner plus d'eau que l'orifice MN percé dans une mince paroi.

398. Il y a plus. Comme les mouvemens obliques des particules M, N ſont altérés par la réſiſtance de l'eau antérieure qui ayant été forcée de changer ſa direction primitive pour ſuivre les parois

du tuyau, a néceſſairement perdu quelque choſe de ſa vîteſſe primitive, la réſiſtance dont il s'agit doit néceſſairement avoir une certaine intenſité pour opérer ſon effet auſſi complétement qu'il eſt poſſible. Le tuyau *MOPN* ne doit donc pas être trop court; & il y a pour lui, dans chaque cas, une longueur propre à procurer un *maximum* d'écoulement. Mais cette longueur ne peut pas être fort conſidérable, parce qu'à meſure que le tuyau devient plus long, le frottement contre l'intérieur de ſes parois ſe fait ſentir davantage, & diminue d'autant la dépenſe.

399. La manière dont nous avons imaginé (397) que le tuyau eſt bouché d'abord, eſt purement idéale. Mais on ſent que l'écoulement ſe fera toujours de même, ſi par exemple l'entrée extérieure du tuyau étant bouchée avec un tampon, on ôte enſuite ce tampon pour permettre le cours à l'eau. Elle ſera encore plus déterminée, en ce cas, à ſuivre les parois du tuyau pour peu qu'il ait de longueur. Car dès le premier inſtant les particules *M*, *N* éprouveront de la réſiſtance, ou de la part du tampon qui ne leur cédera pas, pour l'ordinaire, avec aſſez de vîteſſe, ou de la part de l'eau compriſe dans la cavité qui eſt entre la tête du tampon & l'orifice *MN*; réſiſtance qui fait gonfler la veine & l'oblige de ſortir à plein tuyau.

On appliquera ſans peine les mêmes remarques, avec quelques changemens, aux tuyaux coniques adaptés horiſontalement à des réſervoirs.

400. Que l'eau ſorte maintenant par un tuyau

Fig. 13. cylindrique vertical *MOPN* (Fig. 13) placé au fond du réservoir *ADCB*. Si l'on imaginoit, comme dans l'article 397 que l'entrée *MN*, fermée d'abord, devint libre tout d'un coup, sans que par-là le mouvement naturel des particules pût être altéré, la veine se contracteroit à l'ordinaire; & abstraction faite de toute résistance de l'air, il n'y auroit aucune raison pour qu'elle se gonflât & joignît les parois du tuyau. L'écoulement se feroit donc comme si la hauteur du tuyau étoit infiniment petite. Mais supposons que
Fig. 18. le tuyau proposé *MOPN* (Fig. 18) soit bouché en-dehors par le moyen d'un tampon *T* qui atteint jusqu'en *XY*. Il est visible, comme ci-dessus, que les particules *m*, *n* éprouvant de la résistance de la part du tampon qui se meut moins vîte qu'elles, ou de la part de l'eau inférieure qui remplit la cavité du tuyau, & qu'elles chassent, elles profitent de la liberté qu'elles ont de réjaillir suivant les sens *mX*, *nY*; & que par conséquent la veine doit se gonfler & sortir à plein tuyau. Elle continuera à sortir de même, pourvu qu'elle ait une certaine adhérence aux parois du tuyau, tant en vertu de sa viscosité naturelle, que de la force qui pousse à chaque instant les particules *m*, *n* dans les sens *mX*, *nY*. Or il suit de-là que l'obliquité naturelle du mouvement à l'entrée *MN* du tuyau est diminuée, & que par conséquent la dépense est plus forte que si l'eau sortoit par un orifice percé dans une mince paroi. Ajoutez que le poids particulier de l'eau contenue à chaque instant dans le tuyau *MOPN* tend ici à favoriser l'écoulement.

401. Il eſt à propos de remarquer que l'adhérence de l'eau aux parois du tuyau eſt ſouvent très-légère, & que la plus petite force ſuffit pour la rompre. Par exemple, l'eau étant entretenue dans un tonneau à la hauteur conſtante de 2 pieds au-deſſus de l'orifice inférieur d'un tube vertical de 2 pouces de hauteur ſur 6 lignes de diamètre, & l'eau ſortant à plein tuyau, j'ai éprouvé pluſieurs fois qu'en frappant légèrement le tuyau avec une clef, l'eau ſe détachoit de ſes parois, & ne faiſoit plus que gliſſer ſur ſon bord ſupérieur comme dans les écoulemens par des orifices percés dans de minces parois. On ſent que les petits coups donnés au tuyau rompent alors l'eſpèce d'engrenage par lequel les particules fluides tiennent à ſes parois.

402. Ces principes ſervent à expliquer facilement pourquoi dans l'hypothèſe de l'article 377, l'eau ſuit ou ne ſuit pas les parois du tuyau, ſuivant la manière dont on le bouche & le débouche. Lorſqu'on employe pour cela la perche *R* (Fig. 14), & qu'on Fig. 14.
la retire de manière qu'une certaine quantité d'eau commence à ſuivre les parois, ou en général lorſque la planche *K* change la direction naturelle des particules à l'entrée du tuyau, il pourra arriver que l'écoulement prenne & conſerve ſon cours ſuivant les parois, & que par conſéquent l'eau ſorte à plein tuyau. Au contraire, la veine ſe reſſerrera, ſi le mouvement oblique des particules à l'entrée du tuyau ne ſouffre pas une altération trop conſidérable. Il eſt évident que ce dernier cas auroit lieu encore, ſi le

tuyau étant bouché par un tampon, ce tampon atteignoit presque *MN*, & qu'on pût l'ôter avec une vîtesse tout au moins égale à celle de l'eau qui le suit.

403. On voit par les mêmes principes, qu'en faisant sortir l'eau à plein tuyau, on ne doit pas pour cela obtenir une dépense effective égale à la dépense naturelle & théorique. Car une partie de la force qui expulse l'eau en *MN* est employée à faire gonfler la veine, & à l'obliger de suivre les parois du tuyau. Cela est également vrai, proportion gardée, pour les tuyaux coniques, & n'a d'exception que pour le seul tuyau dont il a été parlé dans l'article 395.

404. La propriété que les tuyaux additionnels ont de donner plus d'eau que les orifices percés dans de minces parois est bien contraire aux idées vulgairement reçues sur cette matière. J'ai rencontré plusieurs Praticiens, habiles à d'autres égards, qui croyoient que pour se procurer la plus grande quantité d'eau qu'il est possible par un orifice donné, il faut que la lame dans laquelle cet orifice est percé, soit la plus mince qu'il est possible, parce que, disoient-ils, on diminue par-là le frottement. Mais ils donnoient beaucoup plus qu'il ne convient à cette résistance, & ne connoissoient pas le déchet bien plus considérable que la contraction de la première espèce occasionne dans la dépense.

405. Pour ne rien laisser à desirer sur ce sujet, relativement aux besoins de la pratique, je rapporterai

terai encore ici quelques expériences qui ont pour objet de faire connoître directement le rapport des dépenſes par des tuyaux additionnels de différens diamètres, & ſous différentes hauteurs de réſervoir.

Dans ces expériences, j'ai employé pour réſervoir un tonneau *ADCB* (Fig. 19) au fond *DC* duquel ſont adaptés verticalement deux tuyaux cylindriques *QSTH*, *MOPN*, hauts chacun de 2 pouces, le premier ayant 6 lignes de diamètre, le ſecond 10 lignes auſſi de diamètre. Les orifices ſupérieurs *QH*, *MN* ſont de niveau avec la face ſupérieure & horiſontale du fond *DC*. L'eau proviſionnelle eſt fournie par un autre tonneau *IFEK* qui la tranſmet au réſervoir par le moyen du canal *R*. En élevant plus ou moins le tampon *V* dont le bout *G* eſt conique, on laiſſe paſſer plus ou moins d'eau dans le canal. On a eu ſoin de briſer le choc de l'eau proviſionnelle à ſon entrée dans le réſervoir *ADCB*, de manière qu'elle n'y cauſe jamais d'ébranlement ſenſible. Fig. 19.

EXPÉRIENCES V, VI, VII, VIII.

406. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'orifice de ſortie = 3 pieds 10 pouces. Cet orifice de ſortie eſt *ST* ou *OP* quand l'eau ſuit les parois du tuyau, & *QH* ou *MN* quand l'eau ne ſuit pas les parois du tuyau.

I. L'eau ſortant par le tuyau *QSTH* de 6 lignes de diamètre, & ſuivant ſes parois, en 1 minute on a reçu 1689 pouces cubes d'eau.

II. L'eau ſortant par le même tuyau, mais ne

faiſant que toucher le bord ſupérieur *QH*, ſans ſuivre le reſte des parois, en 80 ſecondes on a reçu 1724 pouces cubes d'eau.

III. L'eau ſortant par le tuyau *MOPN* de 10 lignes de diamètre, & ſuivant ſes parois, en 24 ſecondes on a reçu 1881 pouces cubes d'eau.

IV. L'eau ſortant par le même tuyau, mais ne faiſant que toucher le bord ſupérieur *MN* ſans ſuivre le reſte des parois, en 30 ſecondes on a reçu 1799 pouces cubes d'eau.

EXPÉRIENCES IX, X, XI, XII.

407. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'orifice de ſortie = 2 pieds. J'entends par l'orifice de ſortie la même choſe que tout-à-l'heure.

I. L'eau ſortant par le tuyau *QSTH* de 6 lignes de diamètre, & ſuivant ſes parois, en 85 ſecondes on a reçu 1731 pouces cubes d'eau.

II. L'eau ſortant par le même tuyau, mais ne faiſant que toucher ſon bord ſupérieur *QH*, ſans ſuivre le reſte des parois, en 110 ſecondes on a reçu 1714 pouces cubes d'eau.

III. L'eau ſortant par le tuyau *MOPN* de 10 lignes de diamètre, & ſuivant ſes parois, en 30 ſecondes on a reçu 1701 pouces cubes d'eau.

IV. L'eau ſortant par le même tuyau, mais ne faiſant que toucher ſon bord ſupérieur *MN* ſans ſuivre le reſte de ſes parois, en 40 ſecondes on a reçu 1735 pouces cubes d'eau.

Résultat de ces expériences.

408. Les huit expériences qui précédent, fournissent cette table.

Hauteurs constantes de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'orifice de sortie, exprimées en lignes.	Diamètres des tuyaux exprimés en lignes.		Pouces cubes d'eau dépensés en 1 minute.
552	6	L'eau sort à plein tuyau.	1689
	10		4703
	6	L'eau ne suit pas les parois.	1293
	10		3598
288	6	L'eau sort à plein tuyau.	1222
	10		3402
	6	L'eau ne suit pas les parois.	935
	10		2603

RÉFLEXIONS.

409. On voit par cette table que *les dépenses par différens tuyaux additionnels, sous une même hauteur d'eau dans le réservoir, sont sensiblement proportionnelles aux aires des orifices ou aux quarrés de leurs diamètres.*

J'ai employé des tuyaux de même hauteur, afin que les circonſtances du frottement fuſſent les mêmes autant qu'il eſt poſſible. Cependant le tuyau de 10 lignes de diamètre donne un peu plus à proportion que l'autre.

410. La même table fait voir que *les dépenſes par des tuyaux additionnels de même diamètre, ſous différentes hauteurs dans le réſervoir, ſont ſenſiblement proportionnelles aux racines quarrées des hauteurs des réſervoirs.* Sur quoi il faut obſerver que les petites hauteurs dans le réſervoir procurent un peu plus d'eau à proportion que les grandes. Mais ſi les tuyaux étoient fort longs, le contraire arriveroit, à cauſe du frottement, comme on le verra Chapitre VI.

411. Des deux articles précédens, il ſuit qu'en général *les dépenſes faites pendant le même temps par différens tuyaux additionnels, ſous différentes hauteurs dans le réſervoir, ſont entr'elles, à peu de choſe près, comme les produits des quarrés des diamètres des tuyaux par les racines quarrées des hauteurs des réſervoirs.*

On voit par-là que les écoulemens par des tuyaux additionnels ſuivent entr'eux les mêmes loix que ceux qui ſe font par des orifices percés dans de minces parois, & que par conſéquent les remarques qu'on a faites ſur ces derniers, s'appliquent auſſi aux premiers avec les changemens convenables.

412. Si l'on compare entr'elles les dépenſes, lorſque l'eau ſort à plein tuyau, & lorſqu'elle ſe détache des parois, ſous une même hauteur de réſervoir au-deſſus de l'orifice de ſortie, & qu'on les

appelle Q & q respectivement, on aura (408) ces différentes proportions,

$$Q : q :: 1689 : 1293,$$
$$Q : q :: 4703 : 3598,$$
$$Q : q :: 1222 : 935,$$
$$Q : q :: 3402 : 2603.$$

Le second rapport de chacune de ces proportions approche fort de celui de 17 à 13, ou même de celui de 13 à 10; & dans la pratique, on peut supposer, sans craindre d'erreur sensible, qu'on ait $Q : q :: 13 : 10$.

413. Donc, lorsqu'on voudra qu'un tuyau additionnel & un orifice percé dans une mince paroi, sous une même hauteur de réservoir, donnent la même quantité d'eau dans le même temps, il faudra que leurs diamètres soient dans la raison de $\sqrt{10}$ à $\sqrt{13}$. Car supposons que sous la même hauteur de réservoir, on ait un tuyau additionnel dont l'eau suive les parois, & deux orifices percés dans une mince paroi; que la dépense du tuyau, pendant le temps proposé, soit nommée Q, le diamètre de ce tuyau $= D$; que les dépenses des deux orifices, pendant le même temps, soient q & q', leurs diamètres D & d. On aura ces deux proportions,

$$Q : q :: 13 : 10, (412),$$
$$q : q' :: D^2 : d^2, (354).$$

Donc $Q = q \times \frac{13}{10}$, & $q' = q \times \frac{d^2}{D^2}$. Ainsi, pour qu'on ait $q' = Q$, il faut qu'on ait $q \times \frac{d^2}{D^2} = q \times \frac{13}{10}$, & par conséquent $D^2 : d^2 :: 10$

: 13. D'où il ſuit qu'on aura $D : d :: \sqrt{10} : \sqrt{13}$.

414. On obſervera, au ſujet des dépenſes de la dernière table, qu'elles ſont un peu moindres qu'on ne les trouveroit par les tables des articles 348, 350, 352. Je ne crois pas qu'il faille attribuer ces différences uniquement aux erreurs inévitables dans les meſures des orifices, des temps & des dépenſes même. Il me ſemble qu'elle doit être rejettée principalement ſur la différence des fluidités des eaux. Toutes les expériences qui ſervent de fondement aux tables des trois articles cités, ont été faites dans la belle ſaiſon, avec une eau très-limpide & très-fluide. Mais les expériences relatives à la dernière table ont été faites avec une eau un peu trouble & imprégnée de corpuſcules étrangers. D'ailleurs les deux tonneaux dont je me ſuis ſervi avoient été précédemment remplis d'huile. Il y avoit eu auſſi de l'huile dans les tuyaux additionnels adaptés au tonneau qui ſervoit de réſervoir. Or il eſt certain que ces ſortes de matières graſſes peuvent augmenter ſenſiblement l'adhérence des particules au fond & aux parois, & ralentir par conſéquent la vîteſſe des écoulemens. Quoi qu'il en ſoit, on comprend aſſez que le plus ou le moins de fluidité des eaux ne change rien aux réſultats des articles précédens, puiſque les écoulemens des mêmes eaux doivent ſuivre les mêmes loix.

415. Voici une table comparative de la dépenſe naturelle par un orifice de 1 pouce de diamètre avec la dépenſe effective par un tuyau additionnel de même diamètre, ſous différentes hauteurs de réſervoir. Elle

eſt analogue à celle de l'article 374. Les dépenſes effectives qui compoſent la troiſième colonne de cette nouvelle table, ſont aux dépenſes naturelles qui compoſent la ſeconde colonne, environ comme 13 eſt à 16. Ces calculs n'ont pas toute la préciſion qu'on auroit pu leur donner d'après les réflexions qui précédent; mais ils ſont ſuffiſamment exacts pour les beſoins de la pratique, qu'on a toujours en vûe.

Il eſt facile d'étendre l'uſage de cette même table, & de trouver par ſon moyen la dépenſe que fera un tuyau additionnel quelconque, ſous une hauteur donnée de réſervoir.

Suppoſons, par exemple, qu'on demande la dépenſe que fera en 1 minute un tuyau additionnel de 4 pouces de diamètre, de 8 pouces de longueur, ſous 25 pieds de hauteur de réſervoir au-deſſus de ſon orifice extérieur? Pour réſoudre cette queſtion, je cherche d'abord, comme il a été expliqué (374) la dépenſe naturelle par un orifice de 4 pouces de diamètre, ſous 25 pieds de hauteur de réſervoir; & je trouve que cette dépenſe eſt de 350490 pouces cubes, en 1 minute. Diminuant cette dépenſe dans le rapport de 16 à 13, on trouvera 284773 pouces cubes pour la dépenſe effective demandée.

Du reſte on a attribué 8 pouces de longueur au tuyau propoſé, parce qu'ayant 4 pouces de diamètre, il faut qu'il ait une certaine longueur pour que l'eau en ſuive les parois, ſur-tout s'il eſt adapté verticalement au fond du réſervoir.

Hauteurs constantes de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'orifice extérieur du tuyau, exprimées en pieds.	Dépenſe naturelle, en 1 minute, par un orifice de 1 pouce de diamètre, exprimée en pouces cubes.	Dépenſe effective pendant le même temps, par un tuyau cylindrique qui a 1 pouce de diamètre & 2 pouces de longueur, exprimée auſſi en pouces cubes.
1	4381	3539
2	6196	5002
3	7589	6126
4	8763	7070
5	9797	7900
6	10732	8654
7	11592	9340
8	12392	9975
9	13144	10579
10	13855	11151
11	14530	11693
12	15180	12205
13	15797	12699
14	16393	13177
15	16968	13620

§. III. *Manière de déterminer les écoulemens par la seule voie de l'expérience.*

416. Nous avons indiqué (361 & 385) la manière de déterminer les écoulemens par le moyen de la théorie combinée avec l'expérience. Mais si on ne veut rien emprunter de la théorie, on pourra parvenir au même but avec le seul secours de l'expérience. C'est ce que je me propose d'expliquer ici. Pour plus de clarté, je raisonnerai sur des exemples particuliers; & je supposerai que les orifices sont percés dans de minces parois. On appliquera sans peine les mêmes méthodes aux écoulemens par des tuyaux additionnels. Toutes les questions qu'on peut proposer sur ce sujet, se réduisent aux suivantes qui sont analogues à celles des articles 245, 246, 247, 248.

417. QUESTION I. *On suppose qu'un réservoir soit entretenu constamment plein à la hauteur de 11 pieds 6 pouces au-dessus d'un orifice de 16 lignes de diamètre; & on demande la quantité d'eau que cet orifice donnera en 8 minutes?*

Les dépenses faites dans le même temps par différens orifices, sous différentes hauteurs de réservoirs, sont entr'elles (356) comme les produits de ces ouvertures par les racines des hauteurs des réservoirs, ou comme les produits des quarrés des diamètres des ouvertures par les racines des hauteurs des réservoirs. Or (374) puisqu'en 1 minute, une ouverture de 12 lignes de diamètre, sous 11 pieds de hauteur d'eau dans le réservoir, donne 8990 pouces

cubes d'eau, il eſt clair qu'en faiſant cette proportion, $144 \times \sqrt{[11 \text{ pieds}]} : 256 \times \sqrt{[11 \text{ pieds } 6 \text{ pouces}]} :: 8990$ pouces cubes d'eau : un quatrième terme, ce quatrième terme, 16341 pouces cubes, eſt la dépenſe que notre orifice de 16 lignes de diamètre fait en 1 minute. Multipliant cette quantité par 8, on aura 130728 pouces cubes pour la dépenſe qu'il fait en 8 minutes.

418. QUESTION II. *On ſuppoſe qu'un réſervoir ſoit entretenu conſtamment plein à la hauteur de 11 pieds 6 pouces au-deſſus d'un orifice qui donne 245544 pouces cubes d'eau en 6 minutes : & on demande le diamètre de cet orifice ?*

Puiſque l'orifice donne 245544 pouces cubes en 6 minutes, il donnera 40924 pouces cubes en 1 minute. Donc en nommant D ſon diamètre exprimé en lignes, nous aurons par la même règle que nous venons d'employer, 144 lignes quarrées $\times \sqrt{[11 \text{ pieds}]} : D^2 \times \sqrt{[11 \text{ pieds } 6 \text{ pouces}]} :: 8990 : 40924$; & par conſéquent $D^2 = 144$ lignes quarrées $\times \frac{40924}{8990} \times \frac{\sqrt{132}}{\sqrt{138}} = 641, 1$ lignes quarrées. Donc $D = 25, 32$ lignes. Le diamètre cherché eſt donc preſque de 2 pouces 1 ligne & $\frac{1}{3}$ de ligne.

419. QUESTION III. *On ſuppoſe qu'un réſervoir entretenu conſtamment plein à la hauteur de 16 pieds, ait donné 45678 pouces cubes d'eau par un orifice de 16 lignes de diamètre, pendant un certain temps : on demande la durée de ce temps ?*

Je cherche d'abord par la méthode de la queſ-

tion I la dépenſe que notre orifice feroit en 1 minute ; & je trouve que cette dépenſe = 19276 pouces cubes. Enſuite j'obſerve que les dépenſes faites par un même orifice, ſous une même hauteur conſtante de réſervoir, étant entr'elles comme les temps qu'elles durent, on aura la proportion, 19276 : 45678 : : 1 minute : au temps cherché qu'on trouvera = 2 minutes 22 $\frac{1}{5}$ ſecondes environ.

420. QUESTION IV. *On ſuppoſe qu'un réſervoir donne 40000 pouces cubes d'eau en 4 minutes, par un orifice de 10 lignes de diamètre : on demande la hauteur du réſervoir ?*

Puiſque le réſervoir propoſé donne 40000 pouces cubes d'eau en 4 minutes, il donnera 10000 pouces cubes en 1 minute. En nommant h la hauteur cherchée, exprimée en pieds, on aura toujours par la règle générale de l'article 356, la proportion, $144 \times \sqrt{[11 \text{ pieds}]} : 100 \times \sqrt{h} :: 8990 : 10000$.

Donc $h = 11 \text{ pieds} \times \frac{(144)^2 \times (100)^2}{(8990)^2} = 28,22$ pieds = 28 pieds 2 pouces 8 lignes environ.

Tous ces réſultats ont autant de préciſion qu'il en faut ordinairement dans la pratique. Mais ſi on croyoit néceſſaire de pouſſer l'exactitude encore plus loin, on y parviendra facilement à l'aide des remarques que nous avons faites dans les articles 371 & 372.

§. IV. *De la diſtribution des eaux.*

421. Soit $MNOP$ (Fig. 20) l'élévation d'un ré- Fig. 20.

ſervoir nourri par les eaux d'un aqueduc, d'une ſource, d'un ruiſſeau, ou de toute autre manière qu'on voudra imaginer. Il eſt queſtion de percer la paroi *MNOP* de pluſieurs ouvertures par leſquelles priſes enſemble, il ſorte autant d'eau que le réſervoir en reçoit, & dont les dépenſes particulières ſoient entr'elles en raiſon donnée. Ce probléme a pluſieurs applications dans la pratique; & il eſt ſurtout utile, lorſqu'on veut partager entre les fontaines publiques ou particulières les eaux amenées dans les différens quartiers d'une ville, & reçues d'abord dans des réſervoirs, d'où elles paſſent enſuite à leurs deſtinations par le moyen de différens tuyaux.

422. La première opération qu'on ait à faire ici, eſt de déterminer la quantité d'eau que le réſervoir reçoit & donne pendant un certain temps. Pour cela, on percera perpendiculairement à la face ou paroi *MNOP* un trou de grandeur convenable, par lequel on laiſſera échapper l'eau. Lorſqu'après les mouvemens d'oſcillation qui auront d'abord lieu, la ſurface de l'eau dans le réſervoir demeurera calme, & ſe tiendra toujours au méme point ſans monter ni deſcendre, on ſera aſſuré que le trou propoſé dépenſe préciſément autant d'eau que le réſervoir en reçoit. Alors on recevra l'eau qu'il donne, dans un baquet, pendant un temps connu; & ayant meſuré exactement cette quantité, ſoit par le moyen de la pinte, ſoit avec tout autre *étalon* bien jaugé, on connoîtra la recette & la dépenſe totales du réſervoir. On pourra toujours l'évaluer en pouces cubes. Il eſt

inutile, comme on voit, de s'embarraſſer de la grandeur préciſe du trou, ni de la hauteur de l'eau dans le réſervoir.

423. Cette opération préliminaire étant faite, & le trou qu'on y a employé étant maintenant bouché, voici comment on partagera l'eau du réſervoir en pluſieurs portions.

Ayant fixé les figures qu'on veut donner aux orifices de diſtribution, & leurs diſtances à la ſurface de l'eau dans le réſervoir, que je ſuppoſe répondre toujours au même point de la paroi *MNOP*, du moins pendant un certain temps : ſi l'on nomme Q la dépenſe totale que le réſervoir peut faire en un temps donné, & que nous venons de déterminer ; & ſi l'on ſuppoſe que les dépenſes partielles, correſpondantes au même temps, ſoient entr'elles reſpectivement comme les nombres quelconques m, n, p, &c : on aura ces différentes proportions,

$m + n + p + \&c : m :: Q$: la première dépenſe partielle $= \frac{mQ}{m + n + p + \&c}$,

$m + n + p + \&c : n :: Q$: la ſeconde dépenſe partielle $= \frac{nQ}{m + n + p + \&c}$,

$m + n + p + \&c : p :: Q$: la troiſième dépenſe partielle $= \frac{pQ}{m + n + p + \&c}$,

&c.

La queſtion ſera donc réduite à trouver la gran-

deur que doit avoir chaque orifice pour dépenser, en un temps donné, une quantité donnée d'eau, sous une hauteur donnée de réservoir ; ce qui revient à la question de l'article 418.

424. Pour éclaircir cela par un exemple, supposons que l'eau s'écoule par les trois orifices circulaires *A*, *B*, *C*, percés dans une mince paroi qui donne lieu à la contraction de la première espèce ; que leurs centres soient placés sur une même ligne horisontale *DE* distante de la surface *QR* de l'eau, de la quantité donnée *CH* ; que la dépense totale Q soit de 3600 pouces cubes en 1 minute ; & que les dépenses particulières des orifices *A*, *B*, *C*, pendant le même temps, soient entr'elles comme les nombres, 6, 3, 1. On aura les proportions,

10 : 6 :: 3600 pouces cubes : dépense de *A* = 2160 pouces cubes.

10 : 3 :: 3600 pouces cubes : dépense de *B* = 1080 pouces cubes.

10 : 1 :: 3600 pouces cubes : dépense de *C* = 360 pouces cubes.

Maintenant, connoissant la hauteur *CH* qu'on peut toujours prendre, sans craindre d'erreur sensible, pour la hauteur moyenne de l'eau au-dessus des trois orifices, il ne s'agit plus que de trouver les diamètres que les orifices *A*, *B*, *C* doivent avoir pour donner les trois quantités d'eau que nous venons de déterminer. Supposons, par exemple, $CH = 6$ pouces, & nommons D, d, δ les diamètres des trois

orifices proposés, exprimés en lignes ; en prenant pour base, d'après l'article 374, qu'un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, sous 1 pied ou 12 pouces de hauteur de réservoir, donne 2722 pouces cubes d'eau en 1 minute, on aura (356) ces proportions,

2722 : 2160 :: 1 × 144 lignes quarrées : $DD \times \sqrt{\frac{1}{2}}$,
2722 : 1080 :: 1 × 144 lignes quarrées : $dd \times \sqrt{\frac{1}{2}}$,
2722 : 360 :: 1 × 144 lignes quarrées : $\delta\delta \times \sqrt{\frac{1}{2}}$,

lesquelles donnent $D = 12,71$ lignes, $d = 9$ lignes, $\delta = 5\frac{9}{10}$ lignes.

425. Il auroit été également facile de trouver les grandeurs des orifices, si leurs centres n'avoient pas été placés sur une même ligne horisontale. Toutes les dispositions de centres sont également admissibles dans la théorie, le niveau de l'eau demeurant le même. Mais dans la pratique il faut considérer que comme l'eau provisionnelle qui nourrit le réservoir diminue par les temps de sécheresse, la surface de l'eau pourra s'abaisser, par exemple, en *DE* ou *FG*. Alors les orifices *A*, *B*, *C* ne donneront pas de l'eau dans la raison convenable. L'orifice *C* n'en donne point du tout, lorsque le niveau de l'eau est en *FG*. Le même inconvénient a lieu, dans un autre sens, pour les trois orifices *V*, *T*, *S*. Lorsque le niveau de l'eau est en *IK*, l'orifice *S* donne plus à proportion que les deux autres. Quelqu'arrangement qu'on donne aux orifices ; lorsqu'ils sont fort inégaux, il y aura toujours des temps où les uns donneront plus à proportion que les autres.

426. De là M. Mariotte a conclu qu'il falloit abandonner les orifices circulaires. Il leur substitue des orifices rectangulaires verticaux qui ont tous même hauteur, & dont les bases sont sur une même ligne horisontale. Par-là, soit que le niveau de l'eau hausse ou baisse, les dépenses demeurent toujours entr'elles dans la même raison. Cependant cette idée n'a pas été adoptée. Les ouvertures rectangulaires sont très-difficiles à faire avec précision ; elles sont sujettes à beaucoup de frottement, sur-tout quand elles sont petites ; elles sont souvent exposées à être bouchées par le limon & les autres ordures que l'eau charie avec elle. On a donc conservé les orifices circulaires, dont la construction est facile, & l'usage commode.

427. Il est aisé d'éviter en grande partie les inconvéniens auxquels nous avons vu que ces ouvertures sont sujettes. Pour cela, il n'y a qu'à mettre tous les centres dans une même ligne horisontale & diviser une grande ouverture en plusieurs autres plus petites, qui prises ensemble fournissent la même quantité d'eau, & la transmettent à un même tuyau. En donnant ainsi à toutes les ouvertures à-peu-près la même grandeur, on fera non-seulement ensorte que leurs dépenses conservent toujours entr'elles à-peu-près le même rapport ; mais on évitera que les grandes ouvertures ne donnent plus à proportion que les petites ; ce qui ne manqueroit pas d'arriver (365), si les ouvertures étoient fort inégales.

428. Dans nos calculs nous avons toujours évalué les quantités d'eau dépensées, en pouces cubes.

Mais

Mais les Fontainiers ne ſe ſervent pas de cette meſure. Ils employent le *pouce d'eau*, la *ligne d'eau*, &c. Voici ce qu'ils entendent par-là.

M. Mariotte a trouvé qu'en 1 minute une ouverture circulaire & verticale, de 1 pouce de diamètre, dont le centre eſt diſtant de 7 lignes, de la ſurface de l'eau, dépenſe près de 14 pintes de paris, le pied cube étant ſuppoſé contenir 36 pintes. Cette dépenſe a été appellée *pouce d'eau* par lui & par les Auteurs qui l'ont ſuivi. La ligne d'eau eſt la $\frac{1}{144}$ partie du pouce d'eau ; elle eſt par conſéquent fournie en 1 minute par un orifice de 1 ligne de diamètre, dont le centre eſt diſtant de 7 lignes, de la ſurface de l'eau. &c.

Il eſt aſſurément très-permis d'employer les mots qu'on définit ; mais pluſieurs Fontainiers ignorans ont abuſé de l'expreſſion de M. Mariotte, & ſe ſont perſuadé que le pouce d'eau étoit en général la dépenſe faite en 1 minute par une ouverture circulaire & verticale, de 1 pouce de diamètre, ſans s'embarraſſer de la hauteur de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du trou ; ce qui eſt abſurde, car la hauteur du réſervoir eſt un des élémens eſſentiels de la dépenſe. Toutes les meſures ſont arbitraires ; la commodité & la facilité qu'elles offrent dans l'uſage ſont les ſeules raiſons qui doivent déterminer au choix qu'on adopte. Il n'y auroit point d'équivoque ni d'autre inconvénient à craindre, ſi l'on évaluoit les dépenſes en pouces cubes ; ou du moins, en meſures qui continſſent un nombre connu de pouces cubes. Je

crois qu'en cela on eſt d'autant plus fondé à s'éloigner de M. Mariotte, qu'il attribue (353) une dépenſe un peu trop forte à une ouverture verticale & circulaire, de 1 pouce de diamètre, ſous 7 lignes de charge.

429. Il ſera toujours facile de trouver par le moyen du poids le nombre de pouces cubes contenus dans un vaſe ou étalon quelconque, en ſe ſouvenant que le pied cube d'eau douce peſe 70 livres à peu de choſe près. Si l'on prend pour étalon la pinte de Paris, & qu'on la meſure juſte, il en faudra 36 pour faire le pied cube. Elle contient par conſéquent 48 pouces cubes. Lorſque l'eau dépaſſe les bords de la meſure, comme il peut ſe faire ſans qu'elle ſe répande, il ne faudra que 35 pintes pour faire le pied cube. Le muid de Paris contient 8 pieds cubes, ou 288 des premières pintes, & 280 des dernières.

SECTION II.

Meſure des eaux qui ſortent de vaſes qui ſe vuident.

430. Dans les écoulemens des vaſes entretenus conſtamment pleins, les dépenſes par de petits orifices ſont toujours les mêmes, quelle que puiſſe être la figure de ces vaſes. Il n'entre dans leur expreſſion que la grandeur même de l'orifice, le temps de l'écoulement & la hauteur du fluide dans le réſervoir. Il n'en eſt pas de même pour les écoule-

mens des vaſes qui ſe vuident. Leur figure eſt un élément eſſentiel de leur dépenſe, comme nous l'avons déja remarqué (270). La queſtion eſt de trouver, à l'aide de la théorie & de l'expérience, les loix que ces dépenſes ſuivent entr'elles.

431. Comme il faut néceſſairement ſe borner, dans cette recherche, à l'examen de quelques cas particuliers, je ne conſidérerai ici que les écoulemens des vaſes priſmatiques. Le réſervoir dont je me ſervirai eſt celui qui a été décrit dans l'article 319, & qui eſt repréſenté par les Figures 3, 4, 5, 6.

432. J'avois d'abord voulu déterminer le temps que ce réſervoir, rempli au premier inſtant, à une certaine hauteur, met à ſe vuider entièrement, du moins à peu de choſe près, par des orifices percés à ſon fond; & j'avois même fait quelques expériences à ce ſujet; mais j'ai reconnu qu'elles ne pouvoient pas être exactes. L'entonnoir qui ſe forme à la ſurface de l'eau, lorſqu'elle eſt encore à quelques pouces de diſtance du fond, & qui diminue le produit de l'orifice, met beaucoup d'incertitude dans la fin de l'écoulement. A meſure que cet entonnoir s'agrandit, l'air s'y loge & occupe la place de l'eau. La ſurface eſt encore à plus de 2 lignes du fond, que l'eau ne fait plus que tomber goutte à goutte; & on ne peut pas établir de régle générale ſur la durée de cette eſpèce de pluie.

433. Examinons donc l'écoulement avant que l'entonnoir ne commence à le dénaturer. L'eau ſort dans les expériences ſuivantes, tantôt par un orifice

de 1 pouce de diamètre, tantôt par un orifice de 2 pouces de diamètre. Ils ſont l'un & l'autre placés au fond du réſervoir, & percés dans de minces plaques de cuivre, comme ci-deſſus. La hauteur primitive de l'eau dans le réſervoir eſt toujours de 11 pieds 8 pouces, ou de 140 pouces. A 4 pieds & à 9 pieds du ſommet de cette hauteur, on a percé dans des plaques de cuivre adaptées aux parois, deux petits trous qu'on bouche avec des chevilles. Ces petits trous ſervent à faire connoître l'inſtant où la ſurface de l'eau en s'abaiſſant vient y répondre. Quand on juge à la vûe ſimple qu'elle eſt prête à y toucher, on ôte la cheville; il ſe forme un petit jet qui détermine avec une grande préciſion l'inſtant déſiré qui eſt celui où l'on ceſſe de conſidérer chaque écoulement. On a donc ainſi le temps que cette ſurface a employé pour s'abaiſſer de 4 pieds, ou de 9 pieds dans le réſervoir. On voit que la hauteur primitive de l'eau dans le réſervoir étant toujours de 140 pouces, ſa hauteur dernière, dans le premier cas, eſt de 140 pouces — 48 pouces = 92 pouces; & que ſa hauteur dernière, dans le ſecond cas, eſt de 140 pouces — 108 pouces = 32 pouces.

EXPÉRIENCES I, II, III, IV.

434. Hauteur primitive de l'eau dans le réſervoir = 11 pieds 8 pouces.

I. L'eau ſortant par un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, en 7 minutes 25 $\frac{1}{2}$ ſecondes, ſa ſurface s'abaiſſe de 4 pieds.

II. L'eau ſortant par un orifice circulaire de 2 pouces de diamètre, en 1 minute 52 ſecondes, ſa ſurface s'abaiſſe de 4 pieds.

III. L'eau ſortant par un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, en 20 minutes $24\frac{1}{2}$ ſecondes, ſa ſurface s'abaiſſe de 9 pieds.

IV. L'eau ſortant par un orifice de 2 pouces de diamètre, en 5 minutes 6 ſecondes, ſa ſurface s'abaiſſe de 9 pieds.

Réflexions.

435. Comparons la théorie avec l'expérience par le moyen de la formule $t = \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K\sqrt{a}}$ qu'on a trouvée (279), & dans laquelle t eſt le temps cherché de l'écoulement, θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur donnée a, A la baſe ou la ſection horiſontale du réſervoir, K l'aire de l'orifice, h la hauteur primitive de l'eau dans le réſervoir, b ſa hauteur dernière ; & rappellons-nous que l'aire K doit être diminuée dans le rapport de 8 à 5, parce qu'il y a contraction de la première eſpèce. Rappellons-nous auſſi que l'aire A eſt un quarré qui a 3 pieds de côté. En appliquant cette formule à nos expériences, on trouve

dans la première, $t = 7' \, 22'', 36$,
dans la ſeconde, $t = 1' \, 50'', 59$,
dans la troiſième, $t = 20' \, 16''$,
dans la quatrième, $t = 5' \, 4''$.

Ces temps devroient être égaux à ceux qu'on a

trouvés par l'expérience, puisque dans l'usage de la formule nous avons tenu compte de l'effet de la contraction. Il s'en faut peu que cette égalité n'ait lieu en effet ; & eu égard à toutes les circonstances qui peuvent altérer les résultats des expériences, nous pouvons conclure en sûreté que les écoulemens effectifs suivent entr'eux la même loi que les écoulemens naturels & théoriques, à-peu-près.

436. Connoissant donc par l'expérience tout ce qui regarde l'écoulement d'un vase prismatique qui se vuide, on déterminera tout ce qui regarde l'écoulement d'un autre vase prismatique qui se vuide aussi, par le moyen de la proportion,

$$t : t' :: \frac{A(\sqrt{h} - \sqrt{b})}{K} : \frac{A'(\sqrt{h'} - \sqrt{b'})}{K'},$$

qu'on a trouvée (283).

Cette proportion n'a lieu en rigueur que pour les écoulemens qui se font par des orifices horisontaux. Mais on peut l'employer aussi pour les écoulemens qui se font par des orifices latéraux, en fixant dans ces derniers un point moyen duquel on comptera les hauteurs de l'eau. Par exemple, dans les orifices circulaires, le centre peut être pris pour le point moyen dont il s'agit. En général, il est permis de supposer dans la pratique que ce même point se confond avec le centre de gravité d'un orifice quelconque, pourvu que la hauteur dernière de l'eau dépasse un peu le bord supérieur de cet orifice.

437. Dans la section II du Chapitre I, nous avons rapporté aux écoulemens des vases qui se vuident,

la théorie du mouvement de l'eau dans un vase qui est submergé dans un fluide, ou qui reçoit par une affusion latérale l'eau de quelque réservoir plus élevé, parce qu'en effet tous ces problêmes sont du même genre. Nous suivrons ici le même ordre. Voici quelques expériences pour éclaircir les articles 288, 289, 290, 291, 292, 293.

438. La Figure 21 représente un tonneau *ADCB* qui a 2 pieds de diamètre, & dans lequel est plongé un cylindre vertical *VMNT* de fer blanc, qui a 1 pied de hauteur & 20 lignes de diamètre intérieur. Ce cylindre est soutenu par un trépied qui s'applique à vis au fond du tonneau. Sur sa surface convexe, on a gradué en lignes trois échelles verticales qui servent à déterminer la hauteur de l'eau, & à poser le cylindre bien à plomb. On a appliqué au fond différens orifices. Le tonneau étant d'abord vuide, du moins jusqu'au-dessous de *MN*, on bouchoit l'orifice supérieur du cylindre, pour empêcher l'eau d'y entrer, à mesure qu'on emplissoit le tonneau. Ensuite on débouchoit subitement le cylindre, & on y observoit le mouvement de l'eau, comme il suit. Fig. 21.

EXPÉRIENCES V, VI.

439. Le cylindre est enfoncé de 11 pouces dans l'eau du tonneau.

I. L'eau entrant dans le cylindre par un orifice *K* qui a 1 ligne de diamètre, elle s'y élève précisément au niveau de celle du tonneau, non au-dessus, en 119 secondes.

II. L'eau entrant dans le cylindre par un orifice de 3 lignes de diamètre, elle s'y élève au niveau de celle du tonneau & ne monte pas au-dessus, en 15 secondes.

Pendant que l'eau monte dans le cylindre, elle s'abaisse un peu dans le tonneau. J'ai tenu compte de cet abaissement qui est très-petit, dans l'enfoncement que j'ai attribué au cylindre.

Réflexions.

440. Il faut remarquer d'abord que l'orifice supérieur du cylindre étant bouché à mesure que l'eau monte dans le tonneau, l'air contenu dans le cylindre est comprimé par cette eau, & se réduit par conséquent en un moindre volume. Il est aisé de déterminer la hauteur qu'il occupera. Car le jour de l'expérience, l'air dans son état naturel, selon le Baromètre, étoit comprimé avec une force sensiblement équivalente au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. La hauteur de la colonne de compression est donc de 32 pieds 11 pouces, lorsque l'eau est élevée dans le tonneau, de 11 pouces au-dessus du point *M* ou *N*. Ainsi (83) la hauteur actuelle de l'air dans le cylindre sera à sa hauteur primitive & naturelle de 11 pouces, comme 32 pieds, sont à 32 pieds 11 pouces, ou comme 10, 69 est à 11. L'eau s'élevera donc dans le fond du cylindre, de 0, 31 pouces, ou d'environ 3, 72 lignes.

441. Cela posé, je cherche les durées de chacune des deux expériences qui précédent, par la méthode

théorique de l'article 291 ; & je trouve, en ayant égard à l'effet de la contraction qui diminue la dépenſe naturelle dans le rapport de 8 à 5, que la première expérience devroit durer 155, 97 ſecondes ; & l'autre, 17, 33 ſecondes. Il s'en faut ſenſiblement que chaque durée théorique ne ſoit égale à la durée effective correſpondante ; mais la différence eſt moindre dans le ſecond cas que dans le premier. D'abord j'ai ſoupçonné quelque défaut dans les grandeurs abſolue & comparative des deux orifices. Mais les ayant vérifiés de nouveau, ils ont été trouvés très-exacts. De plus le fond du cylindre ayant à peine un quart de ligne d'épaiſſeur, la contraction doit être de la même eſpèce pour les deux orifices. Quelle peut donc être la raiſon de cette différence entre la théorie & l'obſervation ? La voici.

442. Lorſqu'on débouche le bout ſupérieur du cylindre, l'eau qui entre par l'orifice *K* perce la tranche d'eau contenue dans le fond du cylindre, & y forme un véritable jet détaché qui dure juſqu'à ce que l'eau ſoit parvenue à une certaine hauteur ; après quoi la ſurface ſe met de niveau ſur toute la largeur du cylindre, & continue à conſerver cette poſition en s'élevant. Or dans les premiers inſtans, la vîteſſe au paſſage de l'orifice eſt dûe à preſque toute la hauteur *HM* de l'eau du tonneau au-deſſus du point *M* ou *N* ; elle ne diminue que peu à peu ; & enfin après la ceſſation du jet elle eſt ſimplement dûe à l'excès de la hauteur de l'eau dans le tonneau ſur celle de l'eau contenue dans le cylindre. Cela poſé, il eſt évident,

& le témoignage des yeux en fait foi, que plus l'orifice eſt petit, plus le jet d'eau doit durer. En effet, ſi l'on conſidère les cas extrêmes, celui où l'orifice *K* feroit infiniment petit par rapport au fond *MN*, & celui où *K* ſeroit égal à *MN*, on verra que dans le premier cas le jet d'eau dureroit toujours, & qu'il n'y en auroit point dans le ſecond. Donc le cylindre doit mettre moins de temps, proportion gardée, à s'emplir par l'orifice de 1 ligne de diamètre, que par celui de 3 lignes de diamètre. De plus on voit que le temps effectif peut être moindre que le temps théorique, parce que l'eau qui entre dans le cylindre, pendant les premiers inſtans, a preſque la même vîteſſe que ſi elle s'échappoit dans l'air. Ceci eſt confirmé par une expérience de M. Daniel Bernoulli, qui a trouvé pluſieurs fois (*Hydrodyn. page* 129) qu'un cylindre ſe vuide dans le même temps, ſoit que les eaux s'échappent dans l'air, ſoit que le fond du cylindre ſoit un peu plongé dans une eau ſtagnante.

443. Concluons encore de-là que nous avons été fondés à dire (288) qu'on ne doit commencer à déterminer par la théorie le temps que le vaſe *AMNC* (Fig. 89, tom. 1.) met à s'emplir, que quand le fluide a quelque hauteur dans le même vaſe. Lorſque j'ajoute enſuite (290) que la hauteur *AR* ne peut pas différer beaucoup de *AM*, je ſuppoſe que l'orifice *M*, quoique petit, a une certaine grandeur. Car s'il étoit extrêmement petit, les deux hauteurs propoſées pourroient différer ſenſiblement. Il eſt impoſſi-

ble de fixer en général leur rapport exact. La théorie n'offre pour cela presqu'aucun secours; & on ne peut guères espérer d'y parvenir que par des expériences très-multipliées.

EXPÉRIENCES VII, VIII, IX.

444. I. L'eau entrant dans le cylindre *VMNT* par un orifice de 1 pouce de diamètre, il faut que ce même cylindre soit enfoncé de 8 pouces 11 lignes dans l'eau du tonneau, pour que l'eau s'y élève jusqu'à son bord supérieur *VT*.

Cette expérience est un peu incertaine à cause des bulles d'air qui se mêlent avec l'eau & qui en troublent le mouvement. Pour la bien faire, il faudroit employer un tuyau beaucoup plus long que celui dont je me suis servi.

II. Le fond *MN* étant tout-à-fait enlevé; par un enfoncement de 7 pouces 7 lignes dans l'eau du tonneau, l'eau s'élève dans le cylindre jusqu'au bord supérieur *VT*.

III. Ayant fait mettre autour de *MN* un large plateau de fer blanc de 10 pouces de diamètre, qui servoit comme de fond au cylindre, & l'eau entrant toujours par l'ouverture entière *MN*, comme dans l'expérience précédente, il ne faut qu'un enfoncement de 6 pouces 11 $\frac{1}{2}$ lignes pour que l'eau dans le cylindre s'élève au bord supérieur *VT*.

RÉFLEXIONS.

445. Nous avons remarqué (292), & nous en

avons indiqué la raiſon, que ſi l'orifice *K* a une grandeur ſenſible par rapport au fond *MN*, le fluide qui entre dans le cylindre doit s'élever au-deſſus du niveau du fluide environnant. L'expérience apprend que la choſe arrive en effet ainſi. Plus l'orifice *K* eſt grand par rapport à *MN*, plus le mouvement aſcenſionnel eſt grand. Quand le fond *MN* eſt tout-à-fait enlevé, le fluide devroit naturellement s'élever dans le cylindre d'une quantité double de l'enfoncement *HM*. Mais une telle aſcenſion n'a pas pleinement lieu à cauſe de la contraction qui reſſerre le paſſage de l'eau en *MN*, & du frottement le long des parois du cylindre.

446. Lorſque le bout inférieur du tuyau eſt plongé librement dans l'eau, les mouvemens obliques des particules qui ſe dirigent vers *MN* ſont moins dénaturés que lorſqu'ils ſont gênés par un plateau ou fond qui en diminue néceſſairement l'obliquité. La contraction doit donc être plus grande dans le premier cas que dans le ſecond. Or à meſure que la contraction augmente, ou que le paſſage en *MN* eſt retréci, le mouvement aſcenſionnel doit néceſſairement diminuer. De-là vient que dans le premier des deux cas propoſés le mouvement aſcenſionnel eſt moindre que dans le ſecond. M. le Chevalier de Borda eſt le premier qui ait fait cette remarque intéreſſante, & qui l'ait confirmée par l'expérience. (Mém. de l'Acad. an. 1766).

CHAPITRE V.

Du mouvement des eaux jailliſſantes.

447. On appelle en général *eaux jailliſſantes*, des eaux qui au ſortir d'un orifice quelconque forment un jet. Mais on donne plus particulièrement ce nom aux eaux qui montent, ou qui ſont lancées par un orifice latéral à une certaine diſtance. L'ouverture *O* (Fig. 22) par laquelle le jet ſort, ſe nomme ordinairement *ajutage*. Fig. 22.

448. Les eaux qui doivent fournir à la dépenſe du jet, s'aſſemblent dans un réſervoir *ADCB* d'où elles ſont amenées au point *O* par un tuyau *GEO* qu'on appelle *tuyau de conduite* ou ſimplement la *conduite*. L'extrémité *RO* de ce tuyau ſe nomme *ſouche*, par alluſion ſans doute à la ſouche d'un arbre aux branches duquel on compare le jet. Quelquefois la ſouche eſt plus large que le reſte du tuyau, & on ne la fait pas de la même matière que lui. Elle eſt pour l'ordinaire de plomb.

449. Quelle que ſoit la direction d'un jet, la dépenſe qu'il fait eſt toujours la même, pourvu que l'ajutage *O* & la hauteur *FO* du réſervoir ſoient les mêmes. Cela eſt une ſuite néceſſaire de la preſſion égale des fluides en tous ſens. Cette dépenſe ſe déterminera donc dans tous les cas par les méthodes du Chapitre précédent. Examinons maintenant les

moyens de procurer aux jets d'eau toute la hauteur, ou l'amplitude poſſibles.

SECTION I.

Des jets verticaux.

450. Suivant la théorie (239) l'eau au ſortir d'un ajutage quelconque très-petit, a une vîteſſe capable de la faire remonter à la hauteur de la ſurface de l'eau dans le réſervoir. Ainſi les jets dirigés de bas en haut ſuivant la verticale s'élèveroient, ſi rien ne les en empêchoit, à la hauteur entière de leurs réſervoirs.

451. Pluſieurs cauſes concourent à diminuer l'élévation naturelle des jets d'eau. Il s'en préſente d'abord deux; le frottement contre le circuit de l'orifice, & la réſiſtance que l'air oppoſe au mouvement de la colonne. L'effet du frottement eſt leger, mais la réſiſtance de l'air eſt conſidérable pour de grandes hauteurs de réſervoir.

452. A ces deux cauſes s'en joint une autre dont on parviendra ainſi à connoître l'effet. Imaginons
Fig. 23. (Fig. 23) pluſieurs files de globules *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c qui ſe touchent & qui n'ayent pas de peſanteur. Concevons qu'en un même inſtant ils ſoient tous lancés ſuivant la direction *AM* par une force donnée. Concevons de plus que chacun d'eux éprouve l'action d'une force retardatrice qui agit dans le ſens oppoſé *MA*, & qui eſt telle que lorſqu'ils arrivent en *MN*,

leur vîteſſe initiale eſt totalement éteinte. Il eſt évident que ſi lorſque chaque première file eſt parvenue en *MN*, elle eſt anéantie tout à coup pour permettre à la file ſuivante de prendre la même poſition, tous les globules (quel que ſoit le nombre des files qui ſe ſuccèdent) conſerveront entr'eux la même poſition, & que la colonne *AMNB* demeurera cylindrique. Mais ſi les premières files ne diſparoiſſent pas pour laiſſer la place libre aux files ſuivantes, de proche en proche l'eſpace *AMNB* ſe remplira : alors les globules qui partent ſans ceſſe de *AB*, choquent ceux qui ſont répandus ſur leur chemin ; ces chocs, dont la plûpart ſe font obliquement, obligent la colonne *AMNB* à s'élargir, & lui font perdre une partie de ſa vîteſſe. Il en eſt exactement de même d'un jet d'eau. Les particules qui ſortent ſans ceſſe de l'ajutage, & qui s'élèvent, ſont retardées par la peſanteur; & comme l'eſpace compris entre l'ajutage & le point où finit leur vîteſſe initiale, eſt rempli de molécules, ces molécules ſont choquées par l'eau qui ſuccède; la colonne s'élargit néceſſairement en s'éloignant de l'ajutage, & perd par cette raiſon une partie de ſa vîteſſe. De plus lorſque le jet eſt bien vertical, les particules après s'être élevé auſſi haut qu'elles peuvent, retombent ſur elles-mêmes par la peſanteur; ce qui doit diminuer encore la vîteſſe des nouvelles particules aſcendantes. Auſſi on obſerve qu'en inclinant un peu le jet, il s'élève un peu plus haut que quand il eſt exactement vertical.

453. Les gros jets s'élèvent plus haut que les

petits, parce que de deux jets qui ſortent avec des vîteſſes égales de leurs ajutages, le plus gros a plus de maſſe, & par conſéquent plus de force pour vaincre les obſtacles oppoſés que n'en a le petit. Je parle ici des jets qui s'élèvent à une hauteur un peu conſidérable. Car pour les jets qui n'excédent pas 2 ou 3 pieds de ~~diamètre~~ hauteur, & dont les ajutages ne ſont pas au-deſſous de 1 ligne de diamètre, les petits s'élèvent ſenſiblement à la même hauteur que les gros. Mais dans le cas même où les gros jets s'élèvent plus haut que les petits, ils ne dépenſent pas par cette raiſon plus d'eau à proportion que ces derniers. Car la dépenſe doit s'eſtimer par la vîteſſe au ſortir de l'ajutage; & cette vîteſſe eſt ſenſiblement la même dans les deux cas, abſtraction faite du frottement.

454. Pour comparer la hauteur des jets avec celle de leurs réſervoirs, voici les expériences que j'ai faites.

Fig. 24 & 25. Au grand réſervoir *ADCB* (Fig. 24 & 25) qui a été décrit dans l'article 319, on a adapté horiſontalement deux tuyaux *OE* de fer blanc, fermés l'un & l'autre par le bout *E*, & ouverts du côté du réſervoir. Ils ont chacun 6 pieds de longueur; le diamètre du premier eſt de 3 pouces 8 lignes; celui du ſecond, de 9 à 10 lignes. En *F* eſt un ajutage de 2 lignes de diamètre; en *G* un ajutage de 4 lignes de diamètre; en *H* un ajutage de 8 lignes de diamètre. De plus il y a (Fig. 24) en *K* un tuyau conique *KM* dont la hauteur eſt de 5 pouces 10 lignes, le diamètre de la baſe inférieure de 9 lignes, celui de

de la base supérieure de 4 lignes ; en *I* un tuyau cylindrique *IN* haut de 5 pouces 10 lignes, & dont le diamètre est de 4 lignes. Pour abréger, j'appellerai *gros tuyau* le tuyau *O E* (Fig. 24) ; & *petit tuyau* le tuyau *O E* (Fig. 25).

J'ai fait souder en dehors, autour de chacun des ajutages, des bouts de tuyau de fer blanc, d'un diamètre plus grand que celui de l'ajutage, pour pouvoir arrêter, quand on veut, l'écoulement, au moyen de bouchons de liege qui entrent dans ces bouts de tuyau.

Expériences I, II, III, IV, V.

455. L'eau est entretenue dans le réservoir à la hauteur constante de 11 pieds au-dessus de la paroi supérieure *O F* du gros tuyau (Fig. 24). Je compte Fig. 24.
la hauteur de chaque jet depuis cette même paroi.

I. Le jet vertical par l'ajutage *F* de 2 lignes de diamètre, s'èlève à 10 pieds 10 lignes. La colonne forme une belle gerbe. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 10 pieds 4 pouces 6 lignes.

II. Le jet vertical par l'ajutage *G* de 4 lignes de diamètre s'élève à 10 pieds 5 pouces 10 lignes. La colonne ne s'élargit pas beaucoup par en haut ; elle forme une belle gerbe. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 10 pieds 7 pouces 6 lignes.

III. Le jet vertical par l'ajutage *H* de 8 lignes de diamètre, s'élève à 10 pieds 6 pouces 6 lignes. Dans tous les jets, l'eau fait des bonds qui ne sont pas de la même hauteur. Ils sont plus sensibles ici que dans

les deux exemples précédens. La colonne s'élargit beaucoup par en haut. En inclinant un peu le jet, il s'élève presqu'à la hauteur de 10 pieds 8 pouces, & la colonne se déforme moins que quand il est exactement vertical.

IV. Le jet vertical par le tuyau conique *KM* s'élève à 9 pieds 6 pouces 4 lignes. La colonne est fort belle. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 9 pieds 8 pouces 6 lignes.

V. Le jet vertical par le tuyau cylindrique *IN* s'élève à 7 pieds 1 pouce 6 lignes. La colonne est fort belle. En inclinant un peu le jet, il s'élève à 7 pieds 3 pouces 6 lignes.

EXPÉRIENCES VI, VII, VIII.

456. L'eau est entretenue dans le réservoir à la hauteur constante de 11 pieds au-dessus de la paroi
Fig. 25. supérieure *OF* du petit tuyau (Fig. 25). Je compte toujours la hauteur du jet depuis cette paroi.

I. Le jet vertical par l'ajutage *F* de 2 lignes de diamètre, s'élève à 9 pieds 11 pouces. La colonne est belle.

II. Le jet vertical par l'ajutage *G* de 4 lignes de diamètre, s'élève à 9 pieds 7 pouces 10 lignes. La colonne se déforme beaucoup, & la gerbe en-haut est fort élargie.

III. Le jet vertical par l'ajutage *H* de 8 lignes de diamètre, ne s'élève guères qu'à 7 pieds 10 pouces. La colonne s'éparpille extrêmement, & n'est formée,

pour ainſi dire, que de jets détachés qui ſe ſuccédent les uns aux autres.

RÉFLEXIONS.

457. On voit par les trois premières expériences que lorſque le tuyau de conduite fournit les eaux avec une abondance ſuffiſante, les gros jets s'élèvent plus haut que les petits. Mais ſi le tuyau de conduite eſt fort étroit, les trois dernières expériences font voir que les petits jets s'élèvent plus haut que les gros. Il faut donc que le diamètre de la conduite ait une certaine grandeur par rapport à celui de l'ajutage, pour que le jet s'élève à toute la hauteur qu'il eſt poſſible. Nous déterminerons dans la ſuite cette grandeur.

458. Souvent on fait les ajutages en forme de cones ou de cylindres ſaillans d'une certaine hauteur au-deſſus de la ſouche. Cet uſage eſt très-vicieux. Car les jets par ces ſortes d'ajutages (Exp. IV & V) ne s'élèvent pas ſi haut que les jets par des ajutages percés immédiatement dans la paroi du tuyau. Les ajutages cylindriques ſont les plus mauvais de tous. Les ajutages qui procurent le plus d'élévation à l'eau, ſont ceux qui ſont percés dans la platine horiſontale qui ferme l'extrémité du tuyau. Il faut que cette platine ſoit bien polie, mince, d'une épaiſſeur uniforme, & percée perpendiculairement. Ceci confirme l'article 388.

459. Il réſulte de la comparaiſon de pluſieurs expériences que M. Mariotte a faites ſur les jets d'eau,

& de la comparaiſon des miennes avec celles du même Auteur que *les différences des hauteurs des jets verticaux, aux hauteurs de leurs réſervoirs, ſont entr'elles ſenſiblement comme les quarrés des hauteurs des jets.* Lorſqu'on connoîtra donc par une expérience la quantité dont il s'en faut qu'un jet ne s'élève à la hauteur de ſon réſervoir, on trouvera par une ſimple proportion la quantité dont il s'en faudra que tout autre jet de hauteur donnée ne s'élève à la hauteur de ſon réſervoir. On aura la hauteur du réſervoir, en ajoutant à la hauteur du jet la quantité trouvée par la proportion qu'on vient d'indiquer.

460. Si la hauteur du réſervoir du ſecond jet dont il s'agit étoit donnée, & qu'il fallût déterminer celle du jet, ce problême demanderoit la réſolution d'une équation du ſecond degré. En effet, ſoient a la hauteur du réſervoir du jet de l'expérience; b la hauteur du même jet; c la hauteur du réſervoir du jet propoſé; x la hauteur de ce même jet : on aura la proportion $a - b : c - x :: bb : xx$; d'où l'on tire $xx = \frac{bb(c - x)}{a - b}$, & $x = \frac{-bb + b\sqrt{[4ac - 4bc + bb]}}{2(a - b)}$.

461. Les jets qui ſe détournent un peu de la direction verticale, s'élèvent un peu plus haut que les jets rigoureuſement verticaux, comme on le voit par les cinq premières expériences. Nous en avons donné la raiſon phyſique (452). Il y a donc quelque choſe à gagner du côté de l'élévation de jet, en lui donnant une petite inclinaiſon. Mais d'un autre côté il ne produit pas un effet auſſi agréable aux yeux que lorſque

la gerbe retombe perpendiculairement ſur elle-même.

462. Quelquefois l'eau qui ſort par un ajutage ſaillit beaucoup plus haut que ne peut lui permettre la hauteur du réſervoir. Ce phénomène qui n'eſt que momentané, eſt produit par l'air que l'eau entraîne avec elle dans la conduite. Voici comment. Supposons que l'orifice *O* (Fig. 22) étant bouché, l'air que l'eau entraîne avec elle ſe ſoit cantonné, du moins en grande partie, dans le petit eſpace *mnub*, extrémité de la ſouche. Lorſqu'on ouvre l'ajutage *O*, cet air s'échappe, l'eau qui le ſuit tombe dans l'eſpace qu'il laiſſe vuide, & acquiert par cette petite chûte dans le tuyau une certaine vîteſſe qui augmente, au paſſage de l'orifice, dans le rapport de l'aire du même orifice à l'aire de la ſection perpendiculaire du tuyau. Car ſoit *Ee* le petit eſpace que la liqueur parcourt dans le tuyau pendant un inſtant; il doit ſortir durant le même inſtant par l'ajutage *O* un volume égal au petit cylindre *eEHh*. D'où il ſuit évidemment que la vîteſſe en *O* eſt à la vîteſſe en *eh*, comme la ſection *eh* eſt à l'orifice *O*. La vîteſſe en *O* peut donc, dans les premiers inſtans, être très-conſidérable, lorſque l'ajutage *O* eſt fort petit par rapport à la ſection *eh*. Mais bientôt elle diminue, parce que le mouvement produit par la chûte de l'eau dans l'eſpace *mnub* s'anéantit par la réſiſtance des obſtacles, comme étant l'effet d'une cauſe accidentelle & momentannée. La ſimple preſſion du fluide ſupérieur à l'orifice devient alors la ſeule cauſe permanente qui produiſe l'écoulement; & la vîteſſe Fig. 22.

n'eſt plus dûe qu'à la hauteur *FO* du réſervoir.

On voit par-là que ces jets ſubits & extraordinaires ne ſont pas produits par le reſſort de l'air qui ſuit l'eau à ſon paſſage par l'orifice, comme quelques Auteurs l'ont penſé. Car il eſt évident que cet air ſe meut avec l'eau contigue, comme feroit celle dont il occupe la place, & qu'il ne peut pas donner d'impulſion à l'eau qui le précéde. C'eſt au contraire l'air antérieur & contigu à l'ajutage, qui en procurant une chûte à l'eau, fait augmenter d'abord conſidérablement la hauteur du jet.

463. Nous avons remarqué (457) que le tuyau de conduite doit avoir une certaine groſſeur pour fournir à la dépenſe de l'ajutage, ſans quoi le jet ne s'élève pas à toute la hauteur qu'il pourroit avoir. Cherchons le plus petit diamètre qu'on puiſſe donner à la conduite, relativement à celui d'un ajutage propoſé.

Il eſt clair, comme tout-à-l'heure, que la vîteſſe au ſortir de l'ajutage eſt à la vîteſſe le long du tuyau, comme la ſection du tuyau eſt à l'ajutage, ou comme le quarré du diamètre du tuyau, eſt au quarré du diamètre de l'ajutage. Donc, en nommant D le diamètre du tuyau, d celui de l'ajutage, h la hauteur FO du réſervoir, u la vîteſſe le long du tuyau, & conſidérant que la vîteſſe permanente du fluide au ſortir de l'ajutage, la ſeule dont il s'agiſſe ici, peut s'exprimer par $\sqrt{h}$; on aura la proportion, $\sqrt{h} : u :: DD : dd$, & par conſéquent $u = \frac{dd}{DD}\sqrt{h}$.

Par la même raiſon, ſi l'on a un ſecond tuyau & un ſecond ajutage, & qu'on déſigne les quantités analogues à D, d, u, h par les mêmes lettres accentuées, on aura l'équation $u' = \frac{d'd'}{D'D'} \sqrt{h'}$.

464. Cela poſé, ſi l'on veut que les deux jets ſoient fournis de la même manière, & que ſi par conſéquent la vîteſſe dans le premier tuyau laiſſe au premier jet toute la hauteur poſſible, la vîteſſe dans le ſecond tuyau laiſſe auſſi au ſecond jet toute la hauteur poſſible, il n'y aura qu'à faire $u = u'$, ou $\frac{dd}{DD} \sqrt{h} = \frac{d'd'}{D'D'} \sqrt{h'}$. On aura donc alors $DD : D'D' :: dd\sqrt{h} : d'd'\sqrt{h'}$, c'eſt à-dire que *les quarrés des diamètres des tuyaux de conduite doivent être entr'eux en raiſon compoſée des quarrés des diamètres des ajutages & des racines quarrées des hauteurs des réſervoirs.*

Ainſi connoiſſant par une expérience immédiate le diamètre que doit avoir un tuyau pour fournir à la dépenſe d'un ajutage donné, ſous une hauteur donnée de réſervoir, on déterminera le diamètre de tout autre tuyau, pour fournir à un ajutage donné, ſous une hauteur donnée de réſervoir. En conſéquence, j'ai fait l'expérience ſuivante.

EXPÉRIENCE IX.

465. La Figure 26 repréſente un tuyau de fer blanc, de 1 pouce de diamètre, garni d'un grand entonnoir *ACB* pour recevoir l'eau qui doit fournir à la dépenſe Fig. 26.

de l'ajutage. La ſouche *RO* eſt de plomb, & ſon diamètre eſt d'un peu plus de 1 pouce. On a mis ſucceſſivement en *O* des ajutages depuis une ligne de diamètre, juſqu'à 7 lignes. La hauteur *FO* du réſervoir a été conſtamment de 3 pieds 2 pouces 11 lignes, & les jets ſe ſont élevés, comme il eſt exprimé ici.

Diamètre de l'ajutage.	Hauteur du jet.		
1 lignes,	3 pieds.	1 pouces.	6 lignes.
2	3	1	8
3	3	2	0
4	3	1	7
5	3	1	5
6	3	0	4
7	2	10	6

RÉFLEXIONS.

466. On voit qu'un très-petit ajutage fait perdre quelque choſe à la hauteur du jet, par la raiſon que nous en avons donnnée (453). Mais la grandeur de l'ajutage a ſa limite, & nous pouvons établir que pour une hauteur de 3 pieds 2 pouces 11 lignes de réſervoir, & une conduite qui a 1 pouce de diamètre,

l'ajutage peut avoir environ 3 $\frac{3}{4}$ lignes de diamètre. Si l'on cherche d'après cette règle quel doit être le diamètre de la conduite, pour 52 pieds de hauteur de réservoir, & un ajutage de 6 lignes de diamètre, on trouvera que ce diamètre doit être d'environ 38 lignes. M. Mariotte trouve par l'expérience, 36 lignes. Pour la facilité des calculs, nous supposerons (toujours d'après la même règle) que pour une hauteur de 16 pieds & un ajutage de 6 lignes de diamètre, il faut que la conduite ait environ 28 $\frac{1}{2}$ lignes de diamètre. Il ne peut y avoir qu'à gagner du côté de la hauteur du jet, en faisant les tuyaux de conduite plus gros que ne le demandent ces calculs ; mais on ne doit pas les faire plus étroits, si l'on veut que le jet s'élève à toute la hauteur qu'on peut espérer.

Dans tous ces calculs, je ne parle point de la contraction de la veine, parce que cet élément entre de la même manière dans les rapports que nous considérons.

467. Nous avons avancé (357) que les vîtesses au sortir d'un réservoir par différens orifices, étoient sensiblement les mêmes (abstraction faite de tout obstacle) par les grands & par les petits orifices, pourvu néanmoins que la largeur du réservoir fût toujours beaucoup plus grande que le plus grand orifice. Ici l'on peut regarder la conduite comme le réservoir, l'ajutage comme l'orifice. Alors en considérant qu'une plus grande hauteur du jet indique une plus grande vîtesse au sortir de l'orifice, & supposant que dans

tous les cas l'eau ſoit fournie avec une abondance ſuffiſante, on pourra ſe former une idée de la limite du rapport qui doit exiſter dans chaque cas entre la largeur du réſervoir & l'aire de l'orifice, pour que l'orifice par ſa grandeur ne faſſe rien perdre à la vîteſſe.

Fig. 27. 468. Le tuyau *CRO* (Fig. 27) m'a donné occaſion de faire une autre expérience qui ſervira d'éclairciſſement à l'article 271.

Ayant fait enlever la ſouche, j'ai fait mettre ſucceſſivement en *O* pluſieurs ajutages de différentes grandeurs; puis ayant fait remplir le tuyau juſqu'en *C*, je lui ai permis de ſe vuider par ces ajutages, ſans lui fournir de nouvelle eau proviſionnelle. Les jets alloient frapper une planche horiſontale *TP*. Lorſque le diamètre de l'ajutage excédoit 4 lignes, le jet alloit au premier inſtant en *Z*, enſuite il augmentoit juſqu'en *S*, après quoi il diminuoit ſans ceſſe; de ſorte que la plus grande amplitude du jet n'eſt pas alors celle qui répond à la plus grande hauteur *O X*, mais à une autre hauteur *O Y*. Quant aux jets par de très-petits ajutages, la plus grande amplitude eſt celle qui répond à la plus grande hauteur d'eau dans le réſervoir. On voit donc que la propoſition de l'article 271 ne peut être vraie théoriquement que pour de petits orifices, comme nous l'avons ſuppoſé.

469. Revenons à notre ſujet. Après avoir fixé le diamètre du tuyau qui doit fournir à la dépenſe du jet, il faut prendre garde de ne pas diminuer la groſſeur de ce tuyau par les robinets deſtinés à arrêter,

quand on le veut, le cours de l'eau, ou à laiſſer échapper l'air que l'eau entraîne avec elle. Souvent il arrive que le paſſage par la crapaudine qui tranſmet l'eau du réſervoir au tuyau, étant plus étroit que le tuyau, l'eau n'eſt pas fournie avec aſſez d'abondance, & il s'en faut beaucoup que le jet ne s'élève à la hauteur convenable. Il arrive ſouvent auſſi que les tuyaux s'engorgent par les matières étrangères que l'eau entraîne avec elle. Nous avons obſervé (264 & 267) combien les étranglemens de toute eſpèce dans les tuyaux de conduite nuiſent à la hauteur & à la dépenſe des jets. Il eſt donc à propos de faire les diamètres de ces tuyaux plus grands dans la pratique, que ne le demande la théorie.

470. Il faut éviter ſoigneuſement qu'il ne ſe trouve pas d'angle droit dans les tuyaux qu'on eſt obligé de couder; car le choc du courant contre ces ſortes d'angles détruit une grande partie de ſa vîteſſe, & fatigue extrêmement la conduite. Lorſqu'on eſt obligé de courber les tuyaux, il faut diſtribuer la courbure ſur toute la longueur, ou du moins ſur un eſpace bien étendu.

471. Si une même conduite doit fournir à la dépenſe de pluſieurs ajutages, il faut chercher un ajutage dont l'aire ſoit égale à la ſomme des aires de tous les ajutages propoſés, & déterminer la groſſeur du tuyau comme s'il avoit à fournir à la dépenſe de l'ajutage trouvé.

472. Il y a pluſieurs autres remarques à faire ſur les tuyaux de conduite; mais je les réſerve pour le

Chapitre ſuivant, dans lequel je traiterai expreſſément du mouvement des eaux dans ces ſortes de tuyaux. On y trouvera la détermination de l'épaiſſeur qu'ils doivent avoir pour réſiſter aux efforts qu'ils ont à ſoutenir. Les choſes que je viens de dire ſur ce ſujet ſont ſpécialement relatives aux tuyaux de conduite deſtinés à fournir à la dépenſe des jets d'eau.

473. J'ajoute encore ici une table pour faciliter l'application des principes que je viens d'établir.

On trouve dans les deux premières colonnes les hauteurs des jets & les hauteurs correſpondantes des réſervoirs. Ainſi, par exemple, on voit que pour ſe procurer un jet de 5 pieds de hauteur, il faut que la ſurface de l'eau dans le réſervoir ſoit élevée de 5 pieds 1 pouce au-deſſus de l'ajutage. Ces deux colonnes ſont les mêmes que dans l'ouvrage de M. Mariotte. Les hauteurs des jets & des réſervoirs qui ne ſont pas compriſes dans la table, ſe trouvent par le moyen de cette même table combinées avec les articles 459 & 460.

La troiſième colonne contient en pintes de Paris, dont 36 forment le pied cube, les dépenſes en 1 minute par un ajutage de 6 lignes de diamètre, relativement aux hauteurs de la ſeconde colonne. Ces dépenſes ont été déterminées par le moyen des expériences du Chapitre précédent. Lorſqu'il ſe trouve des fractions de pintes au-deſſous de $\frac{1}{2}$, je les néglige; mais ſi ces fractions valent $\frac{1}{2}$ ou plus de $\frac{1}{2}$, j'écris 1 à leur place. Connoiſſant les dépenſes par un ajutage

de 6 lignes de diamètre, une ſimple proportion ſera connoître les dépenſes par tout autre ajutage, ſous même hauteur dans le réſervoir, puiſqu'il a été démontré (354) que les dépenſes ſont alors entr'elles comme les aires des ajutages, ou comme les quarrés des diamètres ou des rayons des mêmes ajutages.

Dans la quatrième colonne, on trouve les diamètres que doivent avoir les tuyaux de conduite pour un ajutage de 6 lignes de diamètre, relativement aux hauteurs de la ſeconde colonne. J'en ai uſé ici pour les fractions de lignes, comme dans la colonne précédente pour les fractions de pintes. Lorſqu'on voudra avoir les diamètres des tuyaux pour d'autres ajutages, & des hauteurs quelconques de réſervoir, on les déterminera par notre table combinée avec l'article 464.

Cette quatrième colonne a été calculée d'après l'hypothèſe (466) que pour un ajutage de 6 lignes de diamètre, ſous 16 pieds de hauteur de réſervoir, il faut que la conduite ait 28 $\frac{1}{2}$ lignes de diamètre, & d'après le principe (464) que les quarrés des diamètres des tuyaux de conduite, ſont comme les quarrés des diamètres des ajutages, multipliés par les racines des hauteurs des réſervoirs.

Il manque une cinquième colonne pour déterminer les épaiſſeurs des conduites. Mais cette détermination demande des principes que je n'expoſerai que dans le Chapitre ſuivant.

Hauteurs des jets, exprimées en pieds.	Hauteurs des réservoirs, exprimées en pieds & pouces.		Dépense en 1 minute par un ajutage de 6 lignes de diamètre, exprimée en pintes de Paris.	Diamètres des tuyaux de conduite relatifs aux deux colonnes précédentes, exprimés en lignes.
5	5	1	32	21
10	10	4	45	26
15	15	9	56	28
20	21	4	65	31
25	27	1	73	33
30	33	0	81	34
35	39	1	88	36
40	45	4	95	37
45	51	9	101	38
50	58	4	108	39
55	65	1	114	40
60	72	0	120	41
65	79	1	125	42
70	86	4	131	43
75	93	9	136	44
80	101	4	142	45
85	109	1	147	46
90	117	0	152	47
95	125	1	158	48
100	133	4	163	49

Scholie.

474. Quoique l'application des règles précédentes à la pratique ne paroiſſe préſenter aucune difficulté, je ferai néanmoins cette application à deux exemples.

Exemple I.

On veut avoir un jet vertical de 44 pieds de hauteur par un ajutage de 1 pouce de diamètre; & l'on demande, 1°. la hauteur du réſervoir; 2°. la dépenſe du jet; 3°. le diamètre du tuyau de conduite?

1°. Puiſque les différences des hauteurs des jets verticaux aux hauteurs des réſervoirs, ſont entr'elles comme les quarrés des hauteurs des jets (459), & qu'un jet de 45 pieds demande une hauteur de réſervoir de 51 pieds 9 pouces (473), en faiſant cette proportion $\overline{45}^2 : \overline{44}^2$ :: 6 pieds 9 pouces : un quatrième terme qui eſt de 6 pieds 7 pouces; ajoutant cette quantité à 44 pieds, la ſomme 50 pieds 7 pouces ſera la hauteur du réſervoir.

2°. En faiſant la proportion, $\sqrt{[51 \text{ pieds } 9 \text{ pouces}]} : \sqrt{[50 \text{ pieds } 7 \text{ pouces}]}$ :: 101 pintes : un quatrième terme, ce terme qui eſt d'environ 100 pintes, ſera la dépenſe en 1 minute par un ajutage de 6 lignes de diamètre, pour la hauteur 50 pieds 7 pouces de réſervoir. Multipliant cette dépenſe par 4, puiſque l'ajutage propoſé a 1 pouce de diamètre, le produit 400 pintes ſera la dépenſe demandée.

3°. Les quarrés des diamètres des tuyaux ſont en

raiſon compoſée des quarrés des diamètres des ajutages & des racines quarrées des hauteurs des réſervoirs ; & par conſéquent les diamètres des tuyaux ſont comme les produits des diamètres des ajutages par les racines quatrièmes des hauteurs des réſervoirs : on aura donc la proportion $6 \sqrt[4]{}$ [51 pieds 9 pouces] : $12 \sqrt[4]{}$ [50 pieds 7 pouces] : : 38 lignes : eſt au diamètre demandé qu'on trouve d'environ 6 pouces 3 lignes.

EXEMPLE II.

On a une pièce d'eau qu'on ne peut remplir que par intervalles. Cette pièce a 4 pieds de profondeur, & elle contient 20 toiſes cubes d'eau. Elle eſt élevée d'environ 38 pieds au-deſſus d'un jardin dans lequel on veut former un jet, au moyen de l'eau qu'elle peut fournir, ſans rien recevoir d'ailleurs : il s'agit de déterminer toutes les choſes relatives à l'établiſſement de ce jet d'eau ?

Le premier objet qu'on doit ſe propoſer pour réſoudre cette queſtion, eſt de chercher le temps que la pièce d'eau mettra à ſe vuider entièrement par un ajutage pris à volonté, car c'eſt là-deſſus qu'on ſe réglera pour déterminer l'ajutage qu'il convient d'employer, & les autres choſes relatives à l'établiſſement du jet. Le problême de l'article 285 pourroit être appliqué ici ; mais je crois que dans la pratique on préférera la méthode ſuivante, qui eſt ſuffiſamment exacte pour l'objet qu'on a en vûe.

Je ſuppoſe que la hauteur moyenne de l'eau au-deſſus

deſſus de la platine horiſontale dans laquelle l'ajutage doit être percé, ſoit de 36 pieds. On peut prendre pour cette hauteur, ſans craindre beaucoup d'erreur, la ſomme faite de la moitié de la hauteur de l'eau dans le réſervoir, & de la hauteur du fond du réſervoir au-deſſus de l'ajutage. Alors je change le problême en un autre qui a été réſolu (419), & qui conſiſte à *trouver le temps dans lequel 20 toiſes cubes d'eau s'écouleront, par exemple, par un ajutage de 1 pouce de diamètre, en ſuppoſant que le vaſe demeure conſtamment plein à la hauteur de 36 pieds au-deſſus de l'orifice.* Il eſt clair que le temps ainſi déterminé ne peut guères différer du temps demandé. Or en opérant, comme dans l'article cité 419, je trouve que ce temps eſt d'environ 613 minutes, ou de 10 heures 13 minutes. Le jet pourra donc être fourni pendant 10 heures 13 minutes, en ſuppoſant l'ajutage de 1 pouce de diamètre. Si l'on veut que le jet dure quatre fois plus de temps, il faudra employer un ajutage quatre fois plus petit, & dont le diamètre ſoit par conſéquent de 6 lignes. &c. On réglera ainſi le diamètre de l'ajutage ſur le temps qu'on voudra que la pièce d'eau fourniſſe au jet.

Le diamètre de l'ajutage étant donné avec la hauteur du réſervoir, le reſte de la ſolution s'acheve comme dans l'exemple précédent.

SECTION II.

Des jets obliques.

Fig. 28. 475. Soit le tuyau de conduite *GEO* (Fig. 28) qui donne de l'eau par l'ajutage *O* ſuivant une direction quelconque *OK* inclinée à l'horiſon. Si chaque goutte immédiatement après ſa ſortie perdoit ſa peſanteur, elle ſe mouvroit ſans ceſſe uniformément ſuivant la direction *OK*; mais la peſanteur la détourne de cette direction, fléchit ſon mouvement, & lui fait décrire une courbe *OSH*. La queſtion eſt d'abord de déterminer la nature de cette courbe.

476. La vîteſſe d'une goutte quelconque au ſortir de l'ajutage *O* étant dûe à la hauteur *FO* du réſervoir (237 & 238); avec cette vîteſſe continuée uniformément ſuivant ſa direction *OK* la goutte parcourroit un eſpace *OK* double de *OF* dans le même temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur *FO* (240). Des points *O* & *K* ſoient menées les horiſontales *OH*, *KI*, dont la ſeconde rencontre en *I* la verticale *OF* prolongée lorſqu'il eſt néceſſaire. Je partage l'eſpace *OK* en une infinité d'élémens égaux *Oa*, *ab*, *bc*, &c; & j'abaiſſe les verticales *ad*, *bf*, *cg*, &c qui déterminent les élémens correſpondans *Od*, *df*, *fg*, &c de la courbe *OSH*. Sur *Od*, *df*, *fg*, &c, comme diagonales, je conſtruis les parallèlogrammes *Oadh*, *dlfm*, *fngp*, &c, qui ont chacun un côté parallèle à *OK*, & un

côté vertical ; enſuite je prolonge les droites fm, gp, &c jusqu'à la verticale ON. Maintenant, conſidérons à chaque inſtant, le mouvement que la goutte propoſée a réellement ſuivant les côtés Od, df, fg, &c de la courbe, comme composés de deux autres, l'un parallèle à OK, provenant de l'impulſion initiale, l'autre vertical, produit par la peſanteur. Ces mouvemens ſont Oa & Oh pour le premier côté, dl ou ab & dm ou hi pour le ſecond, fn ou bc & fp ou ik pour le troiſième, &c. En raiſonnant toujours de même juſqu'à ce que la ſomme des élémens Oa, ab, bc, &c compoſe la droite finie OL; & que la ſomme des élémens Oh, hi, ik, &c compoſe la verticale correſpondante ON ou LM, on verra que la goutte décrit la courbe OSH, avec cette loi que dans le temps où elle décriroit uniformément l'eſpace quelconque OL avec ſa vîteſſe en O, elle décriroit la verticale ON ou LM correſpondante en vertu de la ſeule peſanteur, & ſa vîteſſe étant zero au premier inſtant. Or ſi l'on nomme θ le temps qu'un corps grave met à tomber d'une hauteur donnée a, le temps qu'il mettra à tomber de la hauteur LM ſera exprimé par $\frac{\theta}{\sqrt{a}} \times \sqrt{LM}$, & le temps qu'il mettra à tomber de la hauteur FO ſera exprimé par $\frac{\theta}{\sqrt{a}} \times \sqrt{FO}$, (235 n°. 2). Le temps employé à parcourir uniformément OK avec la vîteſſe de la goutte en O ſera donc auſſi $\frac{\theta}{\sqrt{a}}$

$\times \sqrt{FO}$; & pour avoir celui qui est employé à parcourir uniformément OL avec la même vîtesse, il faut faire la proportion, OK ou $2FO : OL ::$ $\frac{\theta}{\sqrt{a}} \times \sqrt{FO}$: au temps cherché $= \frac{\theta}{\sqrt{a}} \times \frac{OL}{2\sqrt{FO}}$. On aura donc l'équation $\frac{\theta}{\sqrt{a}} \times \sqrt{LM} = \frac{\theta}{\sqrt{a}} \times \frac{OL}{2\sqrt{FO}}$, ou bien $4LM \times FO = \overline{OL}^2$, qui caractérise la courbe OSH.

477. Mais pour connoître plus particulièrement cette courbe, on observera que les deux triangles semblables OIK, OQL, donnent $OL = \frac{OQ \times KO}{KI} = \frac{OQ \times 2FO}{KI}$, $LQ = \frac{OQ \times OI}{KI}$, $LM = LQ - MQ = \frac{OQ \times OI}{KI} - MQ$. Substituant pour OL & LM leurs valeurs dans l'équation précédente, on trouvera $\overline{OQ}^2 \times FO = OQ \times OI \times KI - MQ \times \overline{KI}^2$. Or MQ devient zero, lorsque $OQ = 0$, & lorsque OQ devient $\frac{OI \times KI}{FO}$. Donc en faisant $OT = \frac{OI \times KI}{2FO} = \frac{OH}{2}$, élevant la verticale TS, on trouvera $ST = \frac{\overline{OI}^2}{4FO}$. Donc si l'on mène encore MP perpendiculaire à ST, on aura $OQ = OT - MP = \frac{OI \times KI}{2FO} - MP$, $MQ = ST -$

$SP = \frac{\overline{OI}^2}{4FO} - SP$. Mettant les valeurs de OQ & de MQ dans l'équation $\overline{OQ}^2 \times FO = OQ \times OI \times KI - MQ \times \overline{KI}^2$, on trouvera, toutes réductions faites, $\overline{MP}^2 = \frac{\overline{KI}^2}{FO} \times SP$. D'où l'on voit que la courbe OSH est une parabole dont S est le sommet, ST l'axe, & le paramètre $= \frac{\overline{KI}^2}{FO}$. Soient la hauteur FO du réservoir $= h$, le sinus total $= R$, le sinus de l'angle KOI que la direction du jet fait avec la verticale $= m$, le cosinus du même angle $= n$: on aura $KI = OK \times \frac{m}{R} = \frac{2hm}{R}$, $OI = OK \times \frac{n}{R} = \frac{2hn}{R}$. Donc l'abscisse $ST = \frac{\overline{OI}^2}{4FO} = h \times \frac{n^2}{R^2}$, l'ordonnée $OT = \frac{OI \times KI}{2FO} = 2h \times \frac{mn}{R^2}$, le paramètre de la parabole $= \frac{\overline{KI}^2}{FO} = 4h \times \frac{m^2}{R^2}$.

478. De-là suit cette construction. Sur la hauteur OF du réservoir (Fig. 29), comme diamètre, soit décrit le demi-cercle OLF qui rencontre en L la direction initiale du jet. Ayant mené l'ordonnée LN, soit prolongée cette ligne du côté de S, & qu'on prenne $LS = LN$. Du point S soit abaissée la verticale ST qui rencontre en T l'horisontale OH. Fig. 29.

Sur les coordonnées rectangles ST, OT, soit décrite la parabole OSH qui ait son sommet en S; elle sera celle que forme le jet d'eau. Car en faisant, comme tout-à-l'heure, $FO = h$, le sinus total $= R$, le sinus de l'angle $LON = m$, son cosinus $= n$, & tirant la corde FL, on aura par la construction qu'on vient d'indiquer, $OT = 2\,LN = \frac{2\,FL \times OL}{FO}$ $= \frac{2}{FO} \times \frac{FO \times m}{R} \times \frac{FO \times n}{R} = 2h \times \frac{mn}{R^2}$, ST $= NO = NL \times \frac{n}{m} = h \times \frac{n^2}{R^2}$, le paramètre $= \frac{\overline{OT}^2}{ST} = 4h \times \frac{m^2}{R^2}$.

479. Donc si l'on prend $Fn = ON$, & par conséquent $ln = LN$, & qu'on décrive la parabole OsH suivant la même loi que la parabole OSH; les deux paraboles auront leurs sommets dans la même verticale TSs, & se rencontreront en H. Il en sera de même de toutes les autres paires de paraboles qu'on pourra décrire de la même manière.

480. Si le terrein n'étoit pas horisontal, mais qu'il formât avec l'horisontale OH l'angle KOH; connoissant cet angle, on trouveroit sans peine le point K où la parabole OSH rencontre le terrein. Car ayant abaissé la verticale KY, & mené l'ordonnée KZ à l'axe ST, supposons les quantités connues $OT = a$, $ST = b$, $TX = c$, le paramètre de la parabole $OSH = p$, l'inconnue KY ou $ZT = x$, les triangles semblables XTO, XZK donneront

$ZK = \frac{OT \times ZX}{XT} = \frac{a(x-c)}{c}$. Donc à cauſe de $SZ = b - x$, & de la propriété de la parabole, on aura $\frac{a^2(x-c)^2}{c^2} = p(b-x)$. D'où l'on tire $x = c - \frac{pc^2}{2a^2} \pm \sqrt{\left[\frac{pbc^2}{a^2} - c^2 + \left(c - \frac{pc^2}{2a^2}\right)^2\right]}$, équation facilement conſtructible par le moyen du cercle.

481. Lorſque l'orifice eſt vertical, comme dans la Figure 30, la parabole OM décrite par le jet, a pour paramètre le quadruple de la hauteur BO du réſervoir, & l'ordonnée $PM = 2\sqrt{[OP \times OB]}$. Fig. 30.

482. On voit par ces formules que ſi l'on a un tuyau qui contienne de l'eau dont on ne connoiſſe pas la hauteur au-deſſus d'un endroit propoſé, on la trouvera par l'amplitude de la parabole que décrira le jet formé en cet endroit. Par exemple, ſi dans le cas de la Figure 30, on ne connoiſſoit pas la hauteur OB du réſervoir, on la trouveroit par l'équation $PM = 2\sqrt{[OP \times OB]}$ qui donne $OB = \frac{\overline{PM}^2}{4OP}$. Le problême n'a pas plus de difficulté dans l'hypothèſe générale de l'article 478.

483. Soit $ADCB$ un vaſe priſmatique vertical; & qu'il ſorte un jet par l'ajutage latéral O. Si l'on prend $OH = OB$, & qu'on mène l'ordonnée HQ de la parabole OQM, la droite BQ touchera cette courbe en Q. Or puiſqu'on a par la propriété de la même courbe OQM, $\overline{HQ}^2 = OH \times 4OB$, on aura

évidemment $HQ = HB$, & par conséquent l'angle HBQ sera de 45 degrés. D'où l'on voit que si dans tous les points de la hauteur BC il y a des ajutages O, tous les jets qui en sortiront, seront touchés par la droite BQ qui forme avec BC un angle de 45 degrés.

484. Les jets obliques ne s'élancent pas si loin dans la pratique, qu'on le trouve par la théorie. Ils sont retardés à-peu-près par les mêmes causes que les jets verticaux. Voici deux expériences que j'ai faites sur leur amplitude. Fig. 10.

EXPÉRIENCES I, II.

485. Le jet sortant dans les deux cas par un ajutage vertical O de 6 lignes de diamètre.

I. Lorsque la hauteur OB du réservoir est de 9 pieds, à une abscisse verticale OP de 4 pieds 3 pouces 7 lignes répond une ordonnée horisontale PM de 11 pieds 3 pouces 3 lignes.

II. Lorsque la hauteur OB du réservoir est de 4 pieds, à une abscisse verticale OP de 4 pieds 3 pouces 7 lignes, répond une ordonnée horisontale PM de 8 pieds 2 pouces 8 lignes.

RÉFLEXIONS.

486. On voit par-là que les amplitudes effectives des jets sont un peu moindres que les amplitudes théoriques. Mais les premières, comme les dernières, sont entr'elles (du moins sensiblement), comme les racines des hauteurs des réservoirs. Connoissant donc par l'expérience une amplitude effective, on trouvera

les autres par de ſimples proportions. Mais ces déterminations ne peuvent être exactes, à moins que les hauteurs des réſervoirs ne ſoient médiocres. Car pour des hauteurs conſidérables, on ne peut ſuppoſer ni que les jets décrivent ſenſiblement des paraboles, ni que leurs amplitudes ſoient proportionnelles aux racines des hauteurs des réſervoirs. Les vraies courbes qu'ils décrivent alors ſont comme indéterminables par la théorie ; & il faudroit un très-grand nombre d'expériences pour parvenir à les connoître par approximation.

487. Il eſt inutile de faire obſerver que les dimenſions des conduites deſtinées à nourrir des jets obliques, ſe déterminent comme pour les jets verticaux. Cela eſt clair de ſoi-même, puiſque ſous même hauteur de réſervoir & même orifice, la dépenſe eſt la même dans les deux cas (449).

488. On ſçait combien les jets d'eau concourent à l'embelliſſement des jardins & des édifices. L'art de les varier & de les produire ſous différentes figures propres à flatter la vûe, a été pouſſé très-loin. Tantôt ils s'élèvent en belles gerbes ou colonnes d'eau qui retombent ſur elles-mêmes ; quelquefois ils forment des eſpèces d'arbres, de champignons, de nappes, &c. Tous ces effets s'opèrent par le moyen de différens tuyaux ou ajutages à qui l'on donne la hauteur de réſervoir, l'inclinaiſon & la ſituation convenables. Mon objet n'eſt pas d'expliquer ici en détail ce méchaniſme, qui eſt plutôt une affaire de goût & d'Architecture que d'Hydraulique.

Ceux qui feront à portée de voir le Parc de Verſailles, les Jardins de Marly, de S. Cloud, de Chantilly, &c, apprendront ſur ce ſujet des choſes dont il n'eſt guères poſſible de donner des idées bien claires dans un Livre. On peut conſulter néanmoins ce que M. Belidor en a dit (*Archit. Hydraul. tom. 2, pag. 389 & ſuiv.*)

CHAPITRE VI.

Du mouvement des eaux dans les tuyaux de conduite.

489. LORSQU'ON a de l'eau à conduire d'un réſervoir à un endroit éloigné, le frottement contre les parois de la conduite, peu ſenſible ſur une petite étendue, le devient beaucoup lorſqu'il eſt répété ſur un long eſpace. On ne doit donc pas déterminer la vîteſſe de l'eau, ou la dépenſe du tuyau, par les méthodes du Chapitre IV, ſans mettre dans les réſultats les modifications relatives à la réſiſtance dont il s'agit. L'expérience ſera notre guide dans cette recherche.

SECTION I.

De la dépenſe des tuyaux de conduite.

490. Les tuyaux de conduite ſont ordinairement curvilignes & inclinés à l'horiſon. Mais nous com-

mencerons par les ſuppoſer rectilignes. L'examen de ce premier cas qui eſt le plus ſimple de tous, répandra le plus grand jour ſur ce ſujet pris généralement, comme on le verra bientôt.

491. Sur une éminence voiſine de la priſe d'eau des fontaines de la ville de Mézieres, on a creuſé dans la terre deux réſervoirs *FEDG*, *HKLM* (Fig. 31), dont le premier qui doit fournir à la dépenſe, peut contenir 25 ou 30 toiſes cubes d'eau; le ſecond beaucoup moins grand, dans lequel l'eau eſt entretenue à une hauteur conſtante au-deſſus de l'axe du tuyau, ne contient guères que 6 toiſes cubes d'eau, lorſqu'il eſt rempli à ſa plus grande hauteur qui eſt d'environ $4\frac{1}{2}$ pieds. Un tuyau horiſontal *O* de fer blanc, d'environ 8 à 9 pouces de diamètre, communique par l'un de ſes bouts avec le réſervoir *HKLM*, & porte à l'autre bout une caiſſe quarrée *X* de fer blanc, qui a 1 pied de hauteur ſur chaque face, & qui eſt fermée de tous côtés. A l'une des faces verticales de cette caiſſe, ſont adaptés perpendiculairement, en *A* & *B*, deux tuyaux rectilignes de fer blanc, l'un ayant 16 lignes de diamètre intérieur, l'autre 2 pouces de diamètre auſſi intérieur. On a porté leurs longueurs juſqu'à 180 pieds. La Figure 31 fait voir toutes ces choſes en profil, la Figure 32 les montre en plan. Le rectangle *efgdi* eſt la ſection horiſontale du réſervoir proviſionnel; *hmk* eſt le réſervoir nourricier des tuyaux, *o* le tuyau de communication de ce réſervoir avec la caiſſe quarrée *x*; *bt* & *bu* les deux tuyaux qui s'emboitent à la caiſſe *x*.

Fig. 31.

Fig. 32.

Il eſt évident que la caiſſe *X* étant fermée de tous côtés, la hauteur de l'eau au-deſſus de l'axe de chaque tuyau, dans chaque expérience, eſt une ligne verticale compriſe entre cet axe ; & le plan horiſontal qui raſe la ſurface de l'eau dans le réſervoir *HKLM*. On a allongé ſucceſſivement les deux tuyaux de 30 pieds, juſqu'à 180 ; & on a meſuré la dépenſe de chacun d'eux, l'autre étant bouché. A l'entrée du tuyau *O*, dans le réſervoir *HKLM*, eſt un tambour de 1 pied de diamètre & de hauteur, criblé de petits trous pour laiſſer paſſer l'eau & arrêter en même temps les ordures qui pourroient engorger les tuyaux, & troubler le mouvement de l'eau.

De diſtance en diſtance, on a fait des petits trous aux parois de chaque tuyau pour faciliter la ſortie de l'air intérieur. On bouche enſuite ces trous avec un peu de cire appliquée par-deſſus.

EXPÉRIENCES I, II, III,..... VI.

492. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'axe du tuyau = 1 pied; & le diamètre du tuyau = 16 lignes.

I. A 30 pieds de la caiſſe *X*, en 45 ſecondes on reçoit 2084 pouces cubes d'eau.

II. A 60 pieds de la caiſſe, en 45 ſecondes on reçoit 1468 pouces cubes d'eau.

III. A 90 pieds de la caiſſe, en 45 ſecondes on reçoit 1190 pouces cubes d'eau.

IV. A 120 pieds de la caiſſe, en 50 ſecondes on reçoit 1126 pouces cubes d'eau.

V. A 150 pieds de la caiſſe, en 50 ſecondes on reçoit 982 pouces cubes d'eau.

VI. A 180 pieds de la caiſſe, en 50 ſecondes on reçoit 877 pouces cubes d'eau.

Expériences VII, VIII, IX,....XII.

493. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'axe du tuyau = 2 pieds ; & le diamètre du tuyau eſt toujours de 16 lignes.

I. A 30 pieds de la caiſſe, en 50 ſecondes on reçoit 3388 pouces cubes d'eau.

II. A 60 pieds de la caiſſe, en 50 ſecondes on reçoit 2407 pouces cubes d'eau.

III. A 90 pieds de la caiſſe, en 50 ſecondes on reçoit 1960 pouces cubes d'eau.

IV. A 120 pieds de la caiſſe, en 1 minute on reçoit 2011 pouces cubes d'eau.

V. A 150 pieds de la caiſſe, en 1 minute on reçoit 1762 pouces cubes d'eau.

VI. A 180 pieds de la caiſſe, en 1 minute on reçoit 1583 pouces cubes d'eau.

Expériences XIII, XIV, XV,....XVIII.

494. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'axe du tuyau = 1 pied ; & le diamètre du tuyau = 2 pouces.

I. A 30 pieds de la caiſſe, en 70 ſecondes on reçoit 8960 pouces cubes d'eau.

II. A 60 pieds de la caiſſe, en 70 ſecondes on reçoit 6492 pouces cubes d'eau.

III. A 90 pieds de la caisse, en 70 secondes on reçoit 5290 pouces cubes d'eau.

IV. A 120 pieds de la caisse, en 75 secondes on reçoit 4930 pouces cubes d'eau.

V. A 150 pieds de la caisse, en 75 secondes on reçoit 4358 pouces cubes d'eau.

VI. A 180 pieds de la caisse, en 75 secondes on reçoit 3899 pouces cubes d'eau.

EXPÉRIENCES XIX, XX, XXI,..... XXIV.

495. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'axe du tuyau = 2 pieds; & le diamètre du tuyau est toujours de 2 pouces.

I. A 30 pieds de la caisse, en 1 minute on reçoit 11219 pouces cubes d'eau.

II. A 60 pieds de la caisse, en 1 minute on reçoit 8190 pouces cubes d'eau.

III. A 90 pieds de la caisse, en 1 minute on reçoit 6812 pouces cubes d'eau.

IV. A 120 pieds de la caisse, en 65 secondes on reçoit 6375 pouces cubes d'eau.

V. A 150 pieds de la caisse, en 65 secondes on reçoit 5668 pouces cubes d'eau.

VI. A 180 pieds de la caisse, en 65 secondes on reçoit 5103 pouces cubes d'eau.

Résultat de ces Expériences.

496. De toutes ces expériences suit la table que voici.

Hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'axe du tuyau, exprimée en pieds.	Distances des points où l'on a reçu l'eau, à la caisse quarrée, exprimées en pieds.	Nombre de pouces cubes d'eau fournis en 1 minute par le tuyau de 16 lignes de diamètre.	Nombre de pouces cubes d'eau fournis en 1 minute par le tuyau de 2 pouces de diamètre.
1	30	2778	7680
1	60	1957	5564
1	90	1587	4534
1	120	1351	3944
1	150	1178	3486
1	180	1052	3119
2	30	4066	11219
2	60	2888	8190
2	90	2352	6812
2	120	2011	5885
2	150	1762	5232
2	180	1583	4710

RÉFLEXIONS.

497. Si l'on cherche par le moyen de l'article 415, les dépenses de deux bouts de tuyaux additionnels de 16 lignes & de 2 pouces de diamètre, dont l'eau suive les parois, on trouvera qu'en 1 minute que nous prenons toujours pour la mesure commune du temps,

1°. La hauteur du réservoir étant de 1 pied, le tuyau de 16 lignes de diamètre donneroit 6330 pouces cubes d'eau.

2°. La hauteur du réservoir étant de 2 pieds, le même tuyau donneroit 8939 pouces cubes d'eau.

3°. La hauteur du réservoir étant de 1 pied, le tuyau de 2 pouces de diamètre donneroit 14243 pouces cubes d'eau.

4°. La hauteur du réservoir étant de 2 pieds, le même tuyau donneroit 20112 pouces cubes d'eau.

On voit que ces dépenses sont beaucoup plus grandes que leurs correspondantes dans la table qui précéde; & que la dépense de chaque tuyau diminue d'autant plus que ce tuyau s'allonge davantage.

498. Pour découvrir, du moins à peu-près, la raison suivant laquelle la dépense d'un même tuyau décroît à mesure que sa longueur croît, nous prendrons le nombre 100 pour représenter dans tous les cas la dépense à l'origine; & alors les dépenses à 30 pieds, à 60 pieds, à 90 pieds, &c, seront les quatrièmes termes de chacune des proportions suivantes.

1°. Le

1°. Le tuyau de 16 lignes de diamètre, ſous 1 pied de hauteur d'eau dans le réſervoir, donne

6330 : 2778 : : 100 : 43, 89
6330 : 1957 : : 100 : 30, 91
6330 : 1587 : : 100 : 25, 07
6330 : 1351 : : 100 : 21, 34
6330 : 1178 : : 100 : 18, 61
6330 : 1052 : : 100 : 16, 62.

2°. Le même tuyau, ſous 2 pieds de hauteur de réſervoir, donne

8939 : 4066 : : 100 : 45, 48
8939 : 2888 : : 100 : 32, 31
8939 : 2352 : : 100 : 26, 31
8939 : 2011 : : 100 : 22, 50
8939 : 1762 : : 100 : 19, 71
8939 : 1583 : : 100 : 17, 70.

3°. Le tuyau de 2 pouces de diamètre, ſous 1 pied de hauteur de réſervoir, donne

14243 : 7680 : : 100 : 53, 92
14243 : 5564 : : 100 : 39, 06
14243 : 4534 : : 100 : 31, 83
14243 : 3944 : : 100 : 27, 69
14243 : 3486 : : 100 : 24, 48
14243 : 3119 : : 100 : 21, 90.

4°. Enfin le même tuyau, ſous 2 pieds de hauteur de réſervoir, donne

20112 : 11219 : : 100 : 55,78
20112 : 8190 : : 100 : 40,72
20112 : 6812 : : 100 : 33,87
20112 : 5885 : : 100 : 29,26
20112 : 5232 : : 100 : 26,01
20112 : 4710 : : 100 : 23,41.

499. Ces calculs font voir que la dépenſe d'un tuyau d'une certaine longueur eſt conſidérablement moindre qu'elle ne ſeroit, ſi l'eau ne trouvoit aucun obſtacle ſur ſon chemin, & conſervoit toute ſa vîteſſe initiale. En effet, les pointes dont les parois du tuyau (quelque polies qu'on les ſuppoſe) ſont toujours hériſſées, doivent néceſſairement ralentir la vîteſſe du courant. Cette réſiſtance varie à raiſon de la longueur du tuyau, de ſa groſſeur & de la hauteur du réſervoir. Voyons de quelle manière ces trois élémens concourent à la former.

500. Il eſt clair que pour un même tuyau & une même hauteur de réſervoir, la dépenſe doit d'autant plus diminuer, que le tuyau s'allonge davantage. Quelques Auteurs ont avancé que la vîteſſe de l'eau va en décroiſſant, ſelon l'ordre des termes d'une progreſſion arithmétique, dont le premier terme ſeroit exprimé par la vîteſſe à l'entrée du tuyau, & le dernier par la vîteſſe effective à la ſortie du même tuyau. Cela ſeroit vrai, ſi tous les filets dont on peut

imaginer que la colonne fluide eſt compoſée, éprouvoient le même frottement, & que ce frottement fût, à chaque inſtant, proportionnel à la vîteſſe du fluide. Alors les eſpaces croiſſant en progreſſion arithmétique, les vîteſſes correſpondantes décroîtroient en progreſſion arithmétique. Mais il faut conſidérer que les filets latéraux ſont les ſeuls qui ſoient ſujets au frottement immédiat contre les parois, & que ce frottement, en ſe faiſant ſentir de proche en proche aux filets contigus, diminue néceſſairement de la circonférence au centre. Ainſi, quelle que ſoit la loi du frottement contre les parois, les filets latéraux & les filets centraux ne ſont pas retardés de la même manière. A meſure que la longueur du tuyau augmente, la vîteſſe des premiers diminue; & en vertu de cette diminution de vîteſſe, ils retardent de moins en moins les ſeconds. Donc, la force qui pouſſe l'eau à l'entrée du tuyau, étant conſtamment la même, les dépenſes doivent diminuer de moins en moins en s'éloignant de l'origine du tuyau. Ce raiſonnement eſt confirmé par nos expériences. L'excès d'une dépenſe ſur la dépenſe conſécutive va toujours en décroiſſant.

501. Ces mêmes expériences peuvent ſervir à trouver, du moins à peu près, le rapport ſuivant lequel les dépenſes diminuent. En effet, ayant pris la droite *AG* (Fig. 33) pour repréſenter l'un de nos tuyaux, & l'ayant partagée en ſix parties égales *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG* qui expriment les diviſions du même tuyau, imaginons que les dépenſes à l'origine *A*, & aux points ſuivans *B*, *C*, *D*, &c, ſont exprimées par Fig. 33.

les perpendiculaires *AH*, *BI*, *CK*, &c; & faiſon paſſer par les points *H*, *I*, *K*, &c la courbe *HIKLMNO*. Les dépenſes étant liées entr'elles par la loi de continuité qui a lieu dans toute la nature, l'ordonnée quelconque *PQ*, priſe en-deçà ou en-delà du point *G*, exprimera la dépenſe correſpondante au point *P* du tuyau. Nous ne connoiſſons pas *à priori* la nature de la courbe propoſée ; & par conſéquent nous ne pouvons pas la tracer en rigueur. Mais on peut lui en ſubſtituer une autre connue, qui paſſe par les points *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, & qui n'en différera pas ſenſiblement.

502. Suppoſons l'abſciſſe indéterminée $AP = x$, l'ordonnée correſpondante $PQ = y$; & prenons $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, pour l'équation de la nouvelle courbe dont il s'agit. Dans cette équation, les coëfficiens a, b, c, d, e, f, g ſont indéterminés; mais on les connoîtra, en obſervant que $x = 0$ donne $y = AH$; $x = AB$, donne $y = BI$; $x = AC$, donne $y = CK$; $x = AD$, donne $y = DL$; $x = AE$, donne $y = EM$; $x = AF$, donne $y = FN$; $x = AG$, donne $y = GO$.

Par exemple, ſoient *AH*, *BI*, *CK*, &c, les dépenſes que fait le tuyau de 16 lignes de diamètre, ſous 1 pied de hauteur de réſervoir, dépenſes qu'il faut prendre dans les articles 496 & 497. Je ſupprimerai dans ces dépenſes la dénomination *pouces cubes*, pour abréger. De plus, je nommerai 1 chacune des parties égales *AB*, *BC*, *CD*, &c de l'axe; ce qui rend $AC = 2$, $AD = 3$, $AE = 4$, &c. Lorſqu'on voudra faire des applications de ces calculs, on ſe ſou

viendra qu'on a pris ainsi 30 pieds pour l'unité de mesure de la longueur du tuyau. Cela posé, on aura ces sept équations du premier degré

$6330 = a,$

$2778 = a + b + c + d + f + g,$

$1957 = a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f + 64g,$

$1587 = a + 3b + 9c + 27d + 81e + 243f + 729g,$

$1351 = a + 4b + 16c + 64d + 256e + 1024f + 4096g,$

$1178 = a + 5b + 25c + 125d + 625e + 3125f + 15625g,$

$1052 = a + 6b + 36c + 216d + 1296e + 7776f + 46656g,$

lesquelles serviront à connoître les sept inconnues a, b, c, d, e, f, g. Ayant déterminé ces inconnues & substitué leurs valeurs dans l'équation générale $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6$, on pourra employer cette même équation à trouver une dépense quelconque y.

503. Il ne seroit pas plus difficile de trouver x en y, soit par la méthode du retour des suites, soit en construisant une courbe qui eût les y pour abscisses, & les x pour ordonnées. Mais quoique tous ces calculs soient très-aisés, & qu'ils donnent une solution fort approchée du problême, il faut avouer qu'ils ne sont guères applicables à la pratique qui demande des

opérations promptes, fondées ſur des règles que la mémoire puiſſe ſe rappeller facilement au beſoin, avantages qu'on ne fait pas difficulté quelquefois de ſe procurer aux dépens même de la grande exactitude. Alors les proportions de l'article 498 ſuffiſent pour ſe faire une idée de la loi que les dépenſes ſuivent dans leurs diminutions.

504. Sous une même hauteur de réſervoir & une même longueur, le petit tuyau dépenſe ſenſiblement moins que le gros, proportion gardée. La raiſon en eſt que relativement à la ſurface de l'orifice par lequel l'eau s'écoule, il y a plus de frottement dans le premier que dans le ſecond. Il eſt bon cependant d'être prévenu que notre gros tuyau a un peu plus de 2 pouces de diamètre. J'ai évalué l'excès à $\frac{1}{8}$ de ligne; mais cet excès eſt trop petit pour infirmer la remarque que nous venons de faire. Nous avons obſervé la même choſe (365) pour le frottement des orifices percés dans de minces parois.

505. Plus la hauteur dans le réſervoir eſt grande pour un même tuyau, plus la diminution de la dépenſe eſt petite, proportion gardée. Nous en avons donné d'avance la raiſon dans l'article 369. On y a vu que le frottement étant proportionnel à la vîteſſe ou à la racine quarrée de la hauteur du réſervoir, il ſe fait d'autant moins ſentir que cette hauteur eſt plus grande.

506. On conçoit que la longueur d'un tuyau peut être telle que l'eau qui le parcourt, n'ait pas la force de vaincre le frottement; ou que du moins l'écou-

lement ne ſe faſſe que dans un temps très-long, & pour ainſi dire, goutte à goutte. J'en ai fait l'expérience avec nos deux tuyaux. A 180 pieds de la caiſſe l'écoulement par chacun d'eux ſe réduit à un filet, & ne ſe fait, pour ainſi dire, que goutte à goutte, lorſque la hauteur de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de leurs parois inférieures, n'eſt plus que de 16 lignes. Il faut donc, pour produire un écoulement ſenſible & continu, une hauteur de réſervoir, ou une pente d'environ 20 lignes ſur 180 pieds, ou de $\frac{2}{3}$ ligne ſur 1 toiſe.

507. Lorſqu'un tuyau eſt vertical ou incliné, la peſanteur tend à accélérer la vîteſſe dans le tuyau même. De la combinaiſon de cette force avec la preſſion de l'eau du réſervoir & avec le frottement, il réſulte des effets qu'il s'agit d'examiner ici.

Soit donc *MQRN* (Fig. 34) un long tuyau cylindrique vertical, adapté au fond du réſervoir *ACDB* entretenu conſtamment plein à la hauteur *KM*. Je fais d'abord abſtraction de la réſiſtance produite par le frottement le long des parois de ce tuyau. Il eſt évident que la vîteſſe du fluide à l'inſtant où il eſt prêt à paſſer en *MN*, étant dûe à la hauteur *KM*; ſi chaque particule devenoit enſuite un corps iſolé & libre, ſoumis ſeulement à l'action de la peſanteur, ce corps parvenu en un point quelconque *Q* de la verticale *MQ*, auroit une vîteſſe dûe à la hauteur *KQ*. Mais toutes les particules tiennent les unes aux autres, & ne ſe ſéparent mutuellement que quand elles y ſont forcées par une puiſſance ſupérieure à Fig. 34.

leur viſcoſité naturelle. Tant qu'elles forment, en vertu de cette dernière force, une même colonne qui remplit entièrement le tuyau *MQRN*, ſans y laiſſer aucun vuide, elles ſe meuvent néceſſairement toutes avec la même vîteſſe le long de l'eſpace *MQ*. Or, comme la vîteſſe produite par la preſſion de l'eau contenue dans le réſervoir *ADCB*, ſur l'orifice *MN*, eſt toujours la même, & que d'un autre côté chaque particule reçoit d'autant plus de coups de la peſanteur, qu'elle s'éloigne davantage de *MN*, il eſt clair que les particules inférieures doivent accélérer de proche en proche les ſupérieures, afin que toutes enſemble prennent la même vîteſſe. La plûpart des Auteurs d'Hydraulique prétendent que cette accélération ſe fait, de manière que la vîteſſe ou la dépenſe en un point quelconque Q ou *O*, eſt toujours comme la racine de la hauteur correſpondante *KQ* ou *KO*. Cela eſt ſenſiblement vrai pour des tuyaux qui ont peu de longueur; car nous avons vu (381) que la dépenſe faite par un court tuyau *MOPN* (Fig. 13), ſous la hauteur *KO*, eſt à la dépenſe qu'il fait, lorſqu'il eſt coupé au point *S*, comme la racine de la hauteur *KO*, eſt à la racine de la hauteur *KS*. La raiſon en eſt qu'alors l'engrenage des parties de la colonne *MOPN* ou *MSTN* eſt aſſez fort pour que la peſanteur puiſſe exercer ſenſiblement toute ſon action ſur l'eau qui compoſe chacune de ces colonnes; & que de plus cette action eſt exercée à-peu-près de la même manière dans les deux cas. Mais il n'en doit pas être ainſi, pour de

longs tuyaux, pareils à celui de la Figure 34. L'adhérence réciproque des particules, qui donne lieu à l'accélération dont nous avons parlé, a ses bornes, comme nous l'avons déja dit; & le tuyau peut devenir si long que les particules inférieures se détachent des supérieures, ou que la colonne finisse par s'amincir vers son bout inférieur, & par ne former plus qu'un filet auquel il est indifférent que le tuyau soit prolongé davantage ou non. L'assertion que la vîtesse ou la dépense par un tuyau vertical adapté au fond d'un réservoir, est comme la racine de la hauteur correspondante, n'est donc pas exacte en général. Nous verrons tout-à-l'heure qu'en ayant égard au frottement, elle s'éloigne entièrement de la vérité.

508. Il en est du mouvement de l'eau dans un tuyau incliné *MNQR* (Fig. 35), comme de celui dans un tuyau vertical. Sous même hauteur de réservoir *ADCB*, la vîtesse initiale à l'orifice *MN* est la même dans les deux cas. De plus, lorsque le tuyau est incliné, la pesanteur relative, qui agit dans le sens de sa longueur, est à la pesanteur absolue, comme la hauteur du plan incliné, est à sa longueur; rapport qui est constant sur toute la longueur du tuyau. La vîtesse produite par la pesanteur relative, le long du plan incliné *MI*, est donc la même que la vîtesse produite par la pesanteur absolue le long de la verticale *EI*. Ainsi pour un petit tuyau incliné *MIFN* (le reste *IFQR* du tuyau *MNQR* étant supprimé), la dépense en *I* doit être sensiblement proportion-

Fig. 35.

nelle à la racine de la hauteur correſpondante *KI* de réſervoir. Mais les mêmes cauſes qui empêchent que cette loi n'ait lieu pour de longs tuyaux verticaux, empêchent également qu'elle n'ait lieu pour de longs tuyaux inclinés.

509. Comme il ſeroit trop embarraſſant de faire des expériences avec de longs tuyaux verticaux, je ne conſidérerai ici que des tuyaux inclinés. Celui dont je me ſuis déja ſervi, & qui a 16 lignes de diamètre, a été incliné ſuivant une direction bien rectiligne *MR*. En cet état il forme l'hypothènuſe d'un triangle rectangle *MOR*, laquelle eſt à la hauteur *OR*, comme 2124 eſt à 241. Il eſt diviſé en trois parties égales *MI*, *IG*, *GR*, chacune de 59 pieds; & on a meſuré les dépenſes à 177 pieds, 118 pieds, & 59 pieds du réſervoir, comme il ſuit.

EXPÉRIENCES XXV, XXVI, XXVII.

510. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du centre de l'orifice ſupérieur du tuyau = 10 pouces.

I. A 177 pieds de la caiſſe, en 45 ſecondes le tuyau a donné 4346 pouces cubes d'eau. Cette dépenſe revient à 5795 pouces cubes en 1 minute.

II. A 118 pieds de la caiſſe, en 45 ſecondes le tuyau a donné 4351 pouces cubes d'eau. Cette dépenſe revient à 5801 pouces cubes en 1 minute.

III. A 59 pieds de la caiſſe, en 45 ſecondes le tuyau a donné 4356 pouces cubes d'eau. Cette dépenſe revient à 5808 pouces cubes en 1 minute.

RÉFLEXIONS.

511. Si notre tuyau n'avoit qu'environ 2 pouces de longueur, ou qu'il fît la fonction de ces bouts de tuyaux additionnels dont nous avons tant parlé dans le Chapitre IV, il donneroit en vertu de la pression de l'eau contenue dans le réservoir, environ 5779 pouces cubes en 1 minute. Or suivant nos expériences, à chaque division il donne un peu plus. Les dépenses paroissent diminuer un peu, à mesure que le tuyau devient plus long. On voit par-là qu'il s'en faut beaucoup que ces dépenses ne suivent la raison des racines des hauteurs *ER*, *HG*, *KI*.

512. En diminuant un peu l'angle d'inclinaison *RMO* du tuyau, les dépenses en *R*, *G*, *I* approcheroient davantage de la dépense à l'origine. De-là suit une remarque qui peut être utile dans la pratique. Quelle que soit la longueur d'un tuyau pareil au nôtre, il donne à peu de chose près la même quantité d'eau qu'il donneroit à son origine, lorsque sa pente *OR* est la huit ou neuvième partie de la longueur *MR*, ou lorsque l'angle *RMO* est d'environ 6 degrés 31 minutes. On voit donc qu'alors le frottement détruit à-peu-près la vîtesse qui provient de la pesanteur relative de l'eau contenue, à chaque instant, dans le tuyau. Cette loi n'a peut-être pas lieu pour toutes sortes de tuyaux & pour toutes sortes de hauteurs de réservoir. Mais on peut du moins se faire par-là quelqu'idée de la pente qu'il convient de donner à un tuyau, lorsqu'on veut compenser par

ce moyen le déchet que le frottement occaſionne dans la dépenſe.

513. Ajoutons au ſujet du même tuyau *MNQR*, une obſervation qui vient à l'appui de l'article précédent. L'ouverture *QR* étant parfaitement bouchée, il ſe forme par les petits trous *n*, *p*, *q* deſtinés à laiſſer échapper l'air intérieur, des jets d'eau qui s'élèvent aux points *y*, *x*, *s*, conformément aux loix expliquées dans le Chapitre précédent. Mais ſi on débouche l'ouverture *QR*, ſans boucher les trous *n*, *p*, *q*, les jets ceſſent ; & au bout de quelques ſecondes, l'écoulement devient régulier & permanent. D'où l'on voit que l'eau ceſſe alors de preſſer, au moins ſenſiblement, la paroi ſupérieure du tuyau, & que la vîteſſe inſtantanée produite par la peſanteur relative de la colonne *MNQR* eſt égale, au moins, à la vîteſſe détruite à chaque inſtant par la réſiſtance du frottement.

514. Je paſſe à la conſidération du mouvement des eaux dans des tuyaux curvilignes; & par la comparaiſon des dépenſes par ces ſortes de tuyaux avec les dépenſes par des tuyaux rectilignes, je vais examiner ſi la courbure n'occaſionne pas quelque déchet dans la vîteſſe.

J'ai fait faire avec du plomb laminé un tuyau
Fig. 36. *ON* (Fig. 36) de 50 pieds de longueur, & de 1 pouce de diamètre intérieur très-bien calibré. Il a 1 ligne d'épaiſſeur. A l'extrémité *O* eſt ſoudé un autre tuyau *M* d'environ 2 pouces de diamètre intérieur qui communique avec le plus petit des deux

réservoirs dont il a été parlé dans l'article 491. Ce tuyau additionnel est garni d'un robinet *R* percé intérieurement d'un trou de plus de 18 lignes de diamètre réduit, par le moyen duquel on permet ou on empêche l'écoulement. Le tuyau *ON* est percé de plusieurs petits trous *E*, *F*, *G* destinés à laisser échapper l'air que l'eau entraîne avec elle.

Expérience XXVIII.

515. Le tuyau rectiligne *ON* ayant été mis dans une position horisontale, & l'eau étant entretenue dans le réservoir à la hauteur de 4 pouces au-dessus de son axe *TV*, en 2 minutes on a reçu par le bout *N*, 1152 pouces cubes d'eau. Cette dépense revient à 576 pouces cubes en 1 minute.

Expérience XXIX.

516. Le tuyau étant toujours le même & dans la même position, & l'eau étant entretenue dans le réservoir à la hauteur constante de 1 pied au-dessus de l'axe *TV*, en 1 minute on a reçu par le bout *N*, 1050 pouces cubes d'eau.

Expérience XXX.

517. Le même tuyau ayant été courbé, comme il est exprimé dans les Figures 37 & 38; & ce tuyau étant fixé bien solidement sur un plancher mobile, d'abord j'ai fait mettre le plancher dans une position horisontale (Fig. 37), ensorte que la courbe *OQSZXYN* doit être regardée comme tracée sur

Fig. 37 & 38.

Fig. 37.

un plan horiſontal. Le point N eſt placé dans le prolongement de la ligne horiſontale TV qui repréſente l'axe du tuyau à l'origine O.

Cela poſé, en entretenant l'eau dans le réſervoir à la hauteur conſtante de 4 pouces au-deſſus de la ligne TV, en 2 minutes on a reçu en N, 1080 pouces cubes d'eau. Cette dépenſe revient à 540 pouces cubes en 1 minute.

EXPÉRIENCE XXXI.

518. Tout étant le même que dans l'expérience précédente, avec cette différence que l'eau eſt maintenant entretenue dans le réſervoir à la hauteur de 1 pied au-deſſus de la ligne TV, en 1 minute on a reçu en N, 1030 pouces cubes d'eau.

EXPÉRIENCE XXXII.

519. Le plan du tuyau curviligne $OQSZXYN$
Fig. 38. a été mis dans une poſition verticale (Fig. 38). L'extrémité N eſt dans la ligne horiſontale TV, & aucun des coudes du tuyau ne s'élève au-deſſus de cette ligne.

Cela poſé, l'eau ayant été miſe à la hauteur de 4 pouces dans le réſervoir, & les évents E, F, G, &c étant bouchés, l'air enfermé dans la conduite empêchoit le mouvement de l'eau, & elle n'a commencé à paroître en N qu'après qu'on a eu fait des petites ouvertures aux coudes ſupérieurs du tuyau. Lorſque le cours a été bien établi, en 2 minutes on a reçu en N, 1040 pouces cubes d'eau. Cette

dépenſe revient à 520 pouces cubes, en 1 minute.

EXPÉRIENCE XXXIII.

520. Tout étant le même que dans l'expérience précédente, avec cette différence que l'eau eſt maintenant entretenue dans le réſervoir à la hauteur de 1 pied au-deſſus de l'axe *TV*, en 1 minute on a reçu en *N*, 1028 pouces cubes d'eau.

Réflexions.

521. Les expériences XXVIII & XXIX comparées enſemble font voir qu'à meſure que la hauteur de l'eau dans le réſervoir augmente, le déchet de la dépenſe diminue ; ce qui confirme l'article 505.

522. Par la comparaiſon de l'expérience XXX avec l'expérience XXVIII, & de l'expérience XXXI avec l'expérience XXIX, on voit que les ſinuoſités horiſontales d'un tuyau diminuent la dépenſe que fait ce même tuyau, lorſqu'il eſt rectiligne. Le frottement doit être ſenſiblement le même dans les deux cas. Le choc de l'eau contre les angles du tuyau fait perdre une partie de la vîteſſe, & diminue par conſéquent la dépenſe. S'il n'y avoit pas de ſaut dans la courbure ; c'eſt-à-dire, ſi chaque angle formé par deux côtés conſécutifs de la courbe approchoit infiniment de 180 degrés, comme cela a lieu dans une véritable courbe, la courbure ne diminueroit point la dépenſe. Car ſoit *OQSZN* (Fig. 39) un tuyau quelconque curviligne & horiſontal qu'un corps parcourt en vertu d'une force impulſive qu'il a reçue en *O*. Fig. 39.

Suppoſons que ce corps étant arrivé au point quelconque Q parcoure en un inſtant l'élément Qq de la courbe, & ſoit prolongé Qq d'une quantité $qr = Qq$. Il eſt évident que ſi lorſque le corps eſt arrivé en q, il pouvoit librement ſe mouvoir ſuivant la direction Qq, il parcourroit qr dans le même temps qu'il a parcouru Qq. Sur qr comme diagonale ſoit conſtruit le parallèlogramme $qhrf$ dont le côté qh eſt dirigé ſuivant la courbe, & le côté qf eſt perpendiculaire à la même courbe. La vîteſſe qr ſe décompoſera dans les deux vîteſſes qf, qh; la première eſt détruite par la réſiſtance de la courbe; la ſeconde eſt la ſeule qui reſte au mobile. Du point q comme centre, avec le rayon qh ſoit décrit le petit arc ht pour déterminer la différence tr des deux vîteſſes qr, qh. Cela poſé, lorſque l'angle Qqh eſt infiniment obtus, & que par conſéquent l'angle hqr eſt infiniment petit, 1°. Le triangle qth peut être regardé comme un triangle rectiligne rectangle en t, & on a la proportion $qt : th :: th : tr$. 2°. La ligne th eſt infiniment petite par rapport à qt, puiſque th eſt à qt comme le ſinus d'un angle infiniment petit eſt au ſinus d'un angle qui diffère infiniment peu d'un angle droit. De-là il réſulte que tr eſt infiniment petite par rapport à ht, puiſque tr eſt troiſième proportionnelle aux lignes qt, th. Donc à plus forte raiſon tr eſt infiniment petite par rapport à qr; & comme qr eſt une quantité infiniment petite du premier ordre, tr eſt néceſſairement une quantité infiniment petite du troiſième ordre. Le mobile ne perd donc en q qu'une partie infini-

men

ment petite du ſecond ordre de ſa vîteſſe. Il en eſt de même pour tous les autres points de la courbe. Donc en parcourant l'eſpace fini *OQSZN*, le mobile ne peut perdre qu'une infinité de parties infiniment petites du ſecond ordre de ſa vîteſſe, ou ce qui revient au même qu'une partie infiniment petite du premier ordre. Donc ſa vîteſſe qui eſt finie ne peut pas être altérée par cette perte, & la dépenſe en *N* doit être la même que ſi le tuyau étoit rectiligne. Concluons donc que ſi en effet les dépenſes ne ſont pas les mêmes dans les deux cas, la perte de vîteſſe que fait le mobile en *q* n'eſt pas infiniment petite du ſecond ordre, & que par conſéquent l'angle *hqr* n'eſt pas infiniment petit. Malgré tous les ſoins qu'on peut prendre dans la pratique de bien adoucir les coudes d'un tuyau, on ne peut guères parvenir à une courbure rigoureuſe, & il doit ſe perdre une partie de la vîteſſe par le choc contre les côtés du polygone.

On peut objecter qu'en courbant le tuyau on a fait diminuer ſon diamètre; mais cette diminution n'eſt pas aſſez grande pour produire toute celle de la dépenſe.

523. En comparant l'expérience XXXII avec l'expérience XXVIII, & l'expérience XXXIII, avec l'expérience XXIX, on voit que les ſinuoſités verticales d'un tuyau font diminuer la dépenſe. Cela vient encore de la perte de vîteſſe que l'eau fait en frappant contre les coudes de la conduite. En effet, les colonnes *OQ* & *SQ* (Fig. 38), *SZ* & *XZ*,

XY & *NY*, ſe font équilibre deux à deux par la peſanteur (35). D'où il ſuit, qu'abſtraction faite de toute réſiſtance, l'eau ſe mouvroit dans le tuyau curviligne *OQSZXYN* de la même manière que s'il étoit rectiligne. Mais dans le premier cas le choc de l'eau contre les coudes de la conduite ſe joint au frottement, & la dépenſe doit être moindre que dans le ſecond.

524. Il nous reſte encore à comparer l'expérience XXXII avec l'expérience XXX, & l'expérience XXXIII avec l'expérience XXXI, pour ſçavoir ſi l'eau eſt également retardée par les ſinuoſités horiſontales & par les ſinuoſités verticales. Or cette comparaiſon fait voir que les premières ſinuoſités ſont un peu moins nuiſibles au mouvement de l'eau que les ſecondes. Cette différence s'explique, en conſidérant que dans le cas des ſinuoſités verticales le mouvement de l'eau eſt compoſé de deux autres mouvemens, l'un horiſontal qui provient de l'impulſion initiale que l'eau a reçue en *O*, l'autre vertical, provenant de la peſanteur, lequel eſt accéléré dans les parties *OQ*, *SZ*, *XY*, & retardé dans les parties *SQ*, *XZ*, *NY*. Or on conçoit que de la combinaiſon de ces mouvemens avec le frottement & avec le choc contre les coudes de la conduite, il peut réſulter un mouvement un peu différent de celui qui a lieu lorſque les ſinuoſités du tuyau ſont horiſontales, & où il n'y a par conſéquent qu'une impulſion horiſontale combinée avec le frottement, & avec le choc contre les coudes de la conduite. La

Figure du tuyau doit aussi influer pour quelque chose dans le même effet.

525. De-là suit la réponse à une question de pratique. On a de l'eau à conduire d'un point à un autre qui en est séparé par des montagnes & des vallées : on demande quel est le meilleur parti, ou de franchir directement les montagnes & les vallées, ou de les contourner, en supposant que le développement de l'espace parcouru par l'eau, soit le même dans les deux cas ? Pour un tuyau à-peu-près pareil au nôtre, le second parti est plus avantageux que le premier, lorsque la charge d'eau est peu considérable, comme on le voit par la comparaison des expériences XXX & XXXII. Mais lorsque la charge d'eau n'est pas fort au-dessous de 1 pied, l'avantage dont il s'agit s'évanouit presqu'entiérement, comme on le voit par la comparaison des expériences XXXI & XXXIII.

526. Dans une longue conduite qui a des pentes & des contrepentes, l'air mêlé avec l'eau peut, en s'accumulant dans les parties éminentes, ralentir ou même arrêter tout-à-fait le cours de l'eau. Soit, par exemple, le tuyau *OMNQK* (Fig. 40), dont le plan est vertical, & dans lequel l'eau coule en allant de *O* vers *K*. Il peut se faire qu'au bout d'un certain temps l'espace *DEN* se remplisse d'air, & que cet air ferme en partie ou en totalité le passage à l'eau. Pour prévenir cet inconvénient, il faut placer aux parties éminentes *N*, *K*, &c, des *ventouses* qui donnent issue à l'air. Ces ventouses sont des petits tuyaux Fig. 40.

de plomb, de 8 à 9 pouces de hauteur, qu'on ſoude à la conduite, & dont le bout ſupérieur ſe ferme par le moyen d'une ſoupape renverſée qui laiſſe ſortir l'air juſqu'à ce que l'eau la ſoulève & la tienne enſuite fermée lorſque les vents ſont ſortis. Quelquefois, au lieu d'une ſoupape, on met au ſommet des ventouſes, des robinets qu'on ne ferme qu'après que l'air eſt entièrement ſorti, & que le cours de l'eau eſt bien établi.

527. M. Couplet a donné dans les Mémoires de l'Acad. pour l'année 1732, *des recherches ſur le mouvement des eaux dans les tuyaux de conduite.* Cet ouvrage, contenant pluſieurs expériences fort en grand & très-propres à éclaircir de plus en plus le ſujet que nous traitons, je crois devoir en donner une idée à mes Lecteurs.

I.

L'Auteur commence par fixer la meſure de l'étalon qui lui a ſervi à faire ſes expériences. Il obſerve que M. Mariotte a fait le pouce d'eau trop grand, en diſant qu'il eſt d'environ 14 pintes de Paris, & que cette quantité d'eau eſt fournie en 1 minute par une ouverture circulaire & verticale, de 1 pouce de diamètre, ſous 7 lignes de charge. Il conclut d'après des expériences faites autrefois par M. ſon pere & par MM. Picard, Roëmer, Villiard, que l'ouverture propoſée ne donne, en 1 minute, que 13 $\frac{1}{3}$ pintes, dont 36 ſont le pied cube; & c'eſt cette valeur qu'il prend pour la meſure du pouce d'eau.

Le vaiſſeau dont il ſe ſert dans ſes expériences pour recevoir les eaux, eſt de 12 pintes, meſure de Saint-Denis; ou, ce qui revient au même, de 18 $\frac{2}{3}$ pintes, meſure de Paris, la pinte de Paris étant à celle de Saint-Denis dans le rapport de 9 à 14. Ce même vaiſſeau ou étalon contient donc 896 pouces cubes. Notre Auteur détermine, avec un pendule à $\frac{1}{2}$ ſeconde, le temps que ſon étalon employe à ſe remplir. Il paroît qu'il n'a rien oublié pour mettre toute l'exactitude poſſible dans ſes expériences. Elles ont été faites à Verſailles ſur pluſieurs conduites différentes, & ſous différentes hauteurs de réſervoir.

II.

La première conduite qui a 4 pouces de diamètre, menoit autrefois l'eau du réſervoir de la Place Dauphine, appellé *le réſervoir des bonnes eaux*, dans celui des petites Ecuries à Verſailles. Le réſervoir de la Place Dauphine eſt un parallèlepipede, dont la hauteur eſt de 2 pieds 8 pouces, & ayant pour baſe un quarré d'environ 2 pieds de côté. Il tire ſes eaux du regard quarré près S. Antoine. A ſon fond eſt une ſoupape qui a 6 pouces de diamètre, & à laquelle s'abouche un tuyau vertical de plomb & du même diamètre de 6 pouces dans la longueur ſeulement d'environ 6 pieds; après quoi ce tuyau s'abouche avec un ſecond tuyau vertical, auſſi de plomb, de 4 pouces de diamètre, & de 17 pieds 4 pouces de longueur. Au bout de ce ſecond tuyau eſt ſoudé, preſqu'en retour d'équerre, un tuyau de fer de 4

pouces de diamètre, qui s'élève en ſerpentant, & qui forme le reſte de la conduite, à cela près que vers ſon extrémité il y a un tuyau de plomb aſcendant, de 4 pouces de diamètre, & d'environ 6 pieds 3 pouces de longueur, par lequel l'eau ſort à gueulebée dans le réſervoir des petites Ecuries.

Le développement total de cette conduite depuis le réſervoir de la Place Dauphine, juſqu'à celui des petites Ecuries eſt de 296 toiſes 5 pieds 4 pouces. Elle a pluſieurs ſinuoſités horiſontales & verticales. Les différences qui ſe trouvent entre les lignes de niveau & les lignes de conduite, ſont aſſez petites pour pouvoir être négligées par rapport au frottement.

Ici & dans la ſuite on doit toujours entendre par charge d'eau la différence de niveau entre la ſurface de l'eau dans le réſervoir de départ, & le bout de la conduite, par lequel l'eau eſt verſée librement à gueulebée dans le réſervoir de décharge.

Cela poſé, 1°. Sous 9 pouces de charge d'eau, la dépenſe que fait la conduite revient à 2 pouces 63 lignes d'eau, en 1 minute *.

---

* Comme dans tout ceci j'extrais M. Couplet, j'employe ſa manière d'évaluer les dépenſes. Mais ſi on veut convertir les pouces d'eau, lignes d'eau, &c, en pouces *cubes* & parties de pouces cubes, il faut ſe ſouvenir que, ſelon lui, le pouce d'eau contient $13\frac{1}{3}$ pintes de Paris, dont 36 font le pied cube, & que par conſéquent le pouce d'eau vaut 640 pouces cubes, la ligne d'eau vaut $\frac{640}{144}$ pouces cubes $=4\frac{4}{9}$ pouces cubes $=$ 4 pouces cubes $+$ 768 lignes cubes, &c. Selon nos expérien-

2°. Sous 21 pouces de charge d'eau, la dépenſe de la conduite, eſt de 4 pouces d'eau, en 1 minute.

3°. Sous 31 pouces de charge d'eau, la dépenſe de la conduite eſt de 5 pouces 60 lignes d'eau, en 1 minute.

III.

A la place de la conduite précédente, on en a mis une autre qui a 6 pouces de diamètre, & qui mene actuellement (1732) l'eau du réſervoir de la Place Dauphine aux petites Ecuries de Verſailles. Elle eſt d'abord compoſée d'un tuyau vertical de plomb, de 6 pouces de diamètre, & de 23 pieds 4 pouces de longueur, adapté au fond du réſervoir de la Place Dauphine. Ce tuyau eſt courbé vers ſon extrémité inférieure, & s'abouche avec un tuyau de fer qui a par-tout 6 pouces de diamètre, & qui finit par s'aboucher avec un tuyau de plomb, de 6 pouces de diamètre, & de 9 pieds 2 pouces 6 lignes de longueur, arrondi en cet endroit, & adapté verticalement par ſon extrémité ſupérieure au fond du réſervoir des petites Ecuries. Il y a dans cette conduite quelques ſinuoſités, mais moins nombreuſes & moins bruſques que dans la précédente. Elle a 285 toiſes 2 pieds 9 pouces 6 lignes de développement

---

ces (353), le pouce d'eau ne vaut que 628 pouces cubes, en ſuppoſant qu'on entende par cette expreſſion la dépenſe que fait en 1 minute une ouverture circulaire de 1 pouce de diamètre ſous 7 lignes de charge d'eau.

depuis le fond du réſervoir de la Place Dauphine jusqu'au fond de celui des petites Ecuries.

Cela poſé, 1°. Sous une charge de 3 pouces, la dépenſe de cette conduite eſt de 7 pouces d'eau 44 lignes, en 1 minute.

2°. Sous une charge de 5 pouces $\frac{1}{4}$, la dépenſe de la conduite eſt de 10 $\frac{1}{2}$ pouces d'eau, en 1 minute.

IV.

La troiſième conduite, partie grès, partie plomb, a 5 pouces de diamètre, & apporte les eaux du regard quarré près S. Antoine dans le réſervoir de diſtribution de la Place Dauphine. Cette conduite eſt de grès dans ſon commencement ſur la longueur d'environ 50 toiſes; tout le reſte eſt en plomb. Son développement total eſt de 1170 toiſes 1 pied 7 pouces. Celui des lignes de niveau qui répondent à chacune de ſes parties, eſt de 1164 toiſes environ. Elle a pluſieurs ſinuoſités.

Cela poſé, 1°. Sous 25 pouces de charge d'eau, la dépenſe de cette conduite eſt de 9 pouces 115 lignes, en 1 minute.

2°. Sous 5 pouces 7 lignes de charge d'eau, la dépenſe eſt de 3 pouces 101 lignes, en 1 minute.

3°. Sous 11 pouces $\frac{1}{3}$ de charge d'eau, la dépenſe eſt de 5 pouces 116 lignes, en 1 minute.

4°. Sous 16 pouces 9 lignes de charge d'eau, la dépenſe eſt de 7 pouces 86 lignes, en 1 minute.

5°. Sous 21 pouces 1 ligne de charge d'eau, la dépenſe eſt de 8 pouces 122 lignes, en 1 minute.

6°. Sous 24 pouces de charge d'eau, la dépense eſt de 9 pouces 86 lignes, en 1 minute.

V.

Les eaux du quarré des deux réſervoirs de la butte de Montboron, ſituée au-deſſus de Verſailles, & ſur la gauche du chemin de Verſailles à Paris, ſont amenées au réſervoir du Château d'eau ſitué dans la rue des Bons-Enfans contre le Corps-de-Garde Suiſſe, par cinq conduites de fer, dont deux ont 18 pouces de diamètre, & les trois autres, 1 pied de diamètre. Ces conduites ont même profil, même développement qui eſt d'environ 600 toiſes. Elles ne ſont pas entièrement de fer; leur extrémité du côté du Château d'eau de la rue des Bons-Enfans, eſt de plomb ſur 53 pieds 10 pouces 9 lignes de longueur. Elles ont pluſieurs ſinuoſités; mais les coudes en ſont aſſez bien adoucis. M. Couplet a trouvé,

1°. Que ſous une charge de 12 pieds 1 pouce 1 ligne, chaque conduite, de 18 pouces de diamètre, dépenſe 934 pouces 30 lignes, en 1 minute.

2°. Que ſous la même charge de 12 pieds 1 pouce 1 ligne, chaque conduite, de 1 pied de diamètre, dépenſe 249 pouces 17 lignes, en 1 minute.

VI.

Enfin, notre Auteur détermine la dépenſe d'une conduite qui ayant d'abord 18 pouces de diamètre, mene l'eau du quarré des réſervoirs du Parc-aux-Cerfs à celui du bout de l'aîle, & qui enſuite n'ayant plus

que 1 pied de diamètre mene l'eau au réſervoir de Roquencour.

Au fond du quarré qui reçoit l'eau des réſervoirs du Parc-aux-Cerfs, eſt une ſoupape de 2 pieds de diamètre, à laquelle s'abouche une conduite de fer qui a 18 pouces de diamètre. Sur l'extrémité de cette conduite s'élève verticalement un tuyau de plomb, de 18 pouces de diamètre, & de 31 pieds 6 pouces de hauteur, lequel conduit & jette à gueulebée l'eau dans le réſervoir du bout de l'aîle. En-delà de ce tuyau, la conduite ſe prolonge, mais n'a plus que 1 pied de diamètre; elle mene l'eau au réſervoir de Roquencour. On permet ou on empêche ce nouvel écoulement, au moyen d'un robinet qui a 1 pied d'ouverture comme ſa conduite à l'origine de laquelle il eſt placé.

Le développement de la conduite depuis le quarré des réſervoirs au Parc-aux-Cerfs, juſqu'à la gueulebée dans le réſervoir du bout de l'aîle, eſt de 790 toiſes environ; & depuis le même quarré, juſqu'à la gueulebée dans le réſervoir de Roquencour, de 2340 toiſes environ.

Cela poſé, 1°. Sous 4 pieds 7 $\frac{1}{2}$ pouces de charge d'eau, & le robinet dont on a parlé étant fermé, la dépenſe de la conduite de 18 pouces de diamètre, par ſa gueulebée dans le réſervoir du bout de l'aîle, eſt de 345 pouces 108 lignes, en 1 minute.

2°. Sous 20 pieds 3 pouces de charge d'eau, & le robinet propoſé étant ouvert, la dépenſe de la conduite, de 1 pied de diamètre, par ſa gueulebée

dans le réſervoir de Roquencour, eſt de 168 pouces, en 1 minute.

Dans ce ſecond cas, l'eau regorge par la gueulebée du tuyau montant dans le réſervoir du bout de l'aîle, quoique cette gueulebée ſoit élevée de 14 pieds $\frac{1}{4}$ au-deſſus de celle qui jette l'eau dans le réſervoir de Roquencour.

VII.

Telles ſont les expériences de M. Couplet. Je les ai rapportées de ſuite, & dépouillées de toutes réflexions, pour plus de clarté.

L'Auteur à la ſuite des expériences relatives à chaque conduite, cherche la dépenſe qu'on auroit dû avoir d'après le principe que les dépenſes, durant un même temps, ſont en raiſon compoſée des orifices & des racines quarrées des hauteurs des charges, & d'après l'expérience de M. Mariotte, qu'une ouverture de 3 lignes de diamètre, ſous une hauteur de 13 pieds de charge, donne 1 pouce d'eau. Il trouve 1°. que les dépenſes meſurées ne ſont point entr'elles dans le rapport que demanderoit le principe cité; 2°. que les mêmes dépenſes meſurées ſont fort au-deſſous des dépenſes calculées d'après l'expérience de M. Mariotte. Il attribue ces différences & ces déchets aux pertes de vîteſſe que l'eau fait à cauſe du frottement le long des parois de chaque conduite. Il remarque auſſi que l'air cantonné dans les coudes d'une conduite oppoſe un grand obſtacle au mouvement de l'eau. L'uſage des ventouſes eſt indiſpenſa-

ble. L'Auteur cite à ce ſujet une expérience qu'il a faite ſur une conduite de plomb , de 8 pouces de diamètre, & de 1900 toiſes de longueur, qui amene les eaux de Roquencour au Château de Verſailles dans les réſervoirs du deſſous de la rampe de la Chapelle, ſous une pente ou charge de 2 pieds 6 pouces. Cette conduite n'a jamais fourni par ſa gueulebée que 22 ou 23 pouces d'eau, d'environ 30 qui ſe préſentent à ſon embouchure. Lorſqu'on lâchoit autrefois l'eau à l'embouchure de cette conduite, il ſe paſſoit environ 10 jours avant qu'il en parût une goutte à ſon bout de ſortie; & cela, parce que le long de cette conduite il y avoit beaucoup de coudes élevés dans leſquels l'air ſe cantonnoit, & d'où il ne ſortoit qu'avec beaucoup de peine. C'eſt pour cela qu'on prit le parti d'adoucir quelques coudes, & de mettre des ventouſes aux endroits les plus élevés où elles ſont encore; & alors au bout de 12 heures on vit ſortir quelques filets d'eau, au lieu de 10 à 12 jours qu'il falloit auparavant; & 5 à 6 heures après il ſortit 22 à 23 pouces d'eau, qui eſt toute la quantité qu'on peut avoir par cette conduite. Dans cet intervalle de 5 à 6 heures qu'on attendit avant d'avoir l'écoulement dans ſa plénitude, il ſortit des bouffées de vent, des floccons d'air & d'eau, & des filets d'eau, qui tantôt couloient & tantôt ne couloient plus. Cela fait voir clairement la réſiſtance que l'air oppoſe aux mouvemens des eaux dans les conduites, & la néceſſité d'y mettre des ventouſes ou des *évents*.

VIII.

Les réflexions de M. Couplet ſont juſtes en général. Cependant je crois devoir remarquer,

1°. Que la manière dont il détermine les dépenſes que les conduites propoſées devroient faire, au moyen du principe d'Hydraulique énoncé ci-deſſus, & de l'expérience de M. Mariotte, eſt erronée, en ce qu'il n'a pas connu, non plus que M. Mariotte, le déchet que la contraction de la veine fluide occaſionne dans la dépenſe. Il auroit dû multiplier les dépenſes ainſi calculées, par la fraction $\frac{13}{10}$, parce que l'eau ſortoit à plein orifice dans les conduites ; au lieu que dans l'expérience de M. Mariotte l'eau ſort par un orifice percé dans une mince paroi, ce qui donne lieu à une contraction de la première eſpèce & diminue la dépenſe, comme nous l'avons expliqué. Alors les différences des dépenſes calculées aux dépenſes effectives auroient été encore plus conſidérables que M. Couplet ne les a trouvées.

2°. L'hypothèſe que les dépenſes par un même tuyau devroient être proportionnelles aux racines quarrées des charges, abſtraction faite de la réſiſtance des obſtacles, n'a lieu que pour des tuyaux qui ont peu de longueur (381). Elle ne paroît pas admiſſible pour de longs tuyaux (508).

3°. Il me ſemble que parmi les obſtacles qui s'oppoſent au mouvement de l'eau, M. Couplet ne compte pas aſſez la perte de vîteſſe, occaſionnée par le choc contre les angles rectilignes des tuyaux qu'il a em-

ployés. Dans la conduite de ſa première figure, il y a, vers l'origine, à l'abouchement du tuyau de plomb avec celui de fer, un angle qui doit détruire en grande partie la vîteſſe du courant. Elle a pluſieurs autres coudes qui ne ſont pas aſſez adoucis. On a corrigé la plûpart de ces défauts dans la ſeconde conduite. La troiſième & la cinquième ont quelques ſauts aſſez bruſques dans leur courbure. La quatrième eſt moins défectueuſe à cet égard. Il eſt certain que les coudes ſont très-nuiſibles au mouvement de l'eau; & on doit en diminuer le nombre, ou du moins les adoucir, le plus qu'il eſt poſſible.

4°. M. Couplet ne dit point ſi dans l'étendue des conduites qu'il a conſidérées il n'y avoit pas quelqu'étranglement qui altérât le cours de l'eau. Il ſe forme ſouvent de tels étranglemens par le limon dont l'eau eſt chargée, & par les ordures, comme les brins d'herbe ou de paille, &c, qu'elle charie; ces matières s'aſſemblent, s'uniſſent entr'elles & compoſent une eſpèce d'enduit qui s'attache aux parois de la conduite, & bouche en partie le paſſage à l'eau. Le ſilence de l'Auteur ſur cet article important, doit faire préſumer qu'il n'y avoit pas en effet de ſemblables obſtructions dans ſes conduites.

Ces remarques que je fais en faveur des Commençans, ne regardent, pour ainſi dire, que la partie théorique du Mémoire de M. Couplet, & ne portent aucune atteinte à ſes expériences qui ſont précieuſes, comme ayant été faites fort en grand, & ſur des conduites qui ont différentes ſinuoſités.

528. En combinant nos expériences avec celles de M. Couplet, on ſe formera une idée générale & ſuffiſante dans la pratique, de la perte de vîteſſe que l'eau fait dans les tuyaux de conduite, ſoit rectilignes, ſoit curvilignes. Par-là on ſe mettra en état de déterminer, à-peu-près, le diamètre qu'il convient de donner à une conduite, relativement à ſa longueur, à la quantité d'eau qu'elle doit porter, & à la charge d'eau. Pour faciliter encore davantage ce travail, j'ajoute ici une table qui contient les réſultats de toutes les expériences dont il s'agit.

La première colonne fait connoître les diamètres des conduites, leurs longueurs, leurs pentes, leurs ſinuoſités. La longueur de chaque conduite eſt toujours priſe dans le ſens de ſon développement, & comprend par conſéquent les ſinuoſités lorſqu'il s'y en trouve.

La ſeconde exprime les charges d'eau, c'eſt-à-dire, les hauteurs des réſervoirs au-deſſus de la gueule-bée par laquelle ſe fait la décharge.

Dans la troiſième, chaque fraction exprime le rapport de la dépenſe effective à la dépenſe qui auroit réellement lieu ſi l'eau n'éprouvoit aucune réſiſtance dans ſon chemin, & ſe mouvoit comme dans les tuyaux additionnels dont il eſt parlé (Chap. IV, Sect. I). Ainſi cette ſeconde dépenſe eſt le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers ſont l'unité, le dénominateur de la fraction propoſée, & la dépenſe effective qui eſt donnée par les expériences précédentes.

Diamètres & longueurs des conduites.	Charges d'eau, ou hauteurs des réservoirs, exprimées en pieds, pouces & lignes.	Rapport de la dépense effective à la dépense dépouillée de l'effet des résistances.
Conduite de plomb, rectiligne & horisontale, qui a 1 pouce de diamètre & 50 pieds de longueur.	0 4 0	$\frac{1}{3,55}$
	1 0 0	$\frac{1}{3,18}$
Même conduite, avec plusieurs sinuosités horisontales.	0 4 0	$\frac{1}{3,78}$
	1 0 0	$\frac{1}{3,43}$
Même conduite; mêmes sinuosités, mais posées verticalement.	0 4 0	$\frac{1}{3,93}$
	1 0 0	$\frac{1}{3,44}$

Diamètres & longueurs des conduites.	Charges d'eau, ou hauteurs des réservoirs, exprimées en pieds, pouces & lignes.			Rapport de la dépense effective à la dépense dépouillée de l'effet des résistances.
Conduite de fer blanc, rectiligne & horisontale, qui a 16 lignes de diamètre, & 180 pieds de longueur.	1	0	0	$\frac{1}{6,01}$
	2	0	0	$\frac{1}{5,64}$
Conduite de fer blanc, rectiligne & horisontale, qui a 2 pouces de diamètre, & 180 pieds de longueur.	1	0	0	$\frac{1}{4,57}$
	2	0	0	$\frac{1}{4,27}$
Conduite de fer blanc, rectiligne, ayant 16 lignes de diamètre, 177 pieds de longueur, & inclinée sous une pente qui est la $\frac{241}{2124}$ partie de sa longueur.	20	11	0	$\frac{1}{5}$

Diamètres & longueurs des conduites.	Charges d'eau, ou hauteurs des réservoirs, exprimées en pieds, pouces & lignes.			Rapport de la dépense effective à la dépense dépouillée de l'effet des résistances.
Même conduite, mais n'ayant que 118 pieds de longueur.	13	4	8	$\frac{1}{4}$
Même conduite, mais n'ayant que 59 pieds de longueur.	6	8	4	$\frac{1}{2,82}$
Conduite presque entièrement de fer, qui a 4 pouces de diamètre, & environ 297 toises de longueur, avec plusieurs sinuosités horisontales & verticales.	0 1 2	9 9 7	0 0 0	$\frac{1}{28,5}$ $\frac{1}{26,53}$ $\frac{1}{25,79}$

Diamètres & longueurs des conduites.	Charges d'eau, ou hauteurs des réservoirs, exprimées en pieds, pouces & lignes.			Rapport de la dépense effective à la dépense dépouillée de l'effet des résistances.
Conduite presque entièrement de fer, qui a 6 pouces de diamètre, & environ 285 toises de développement, avec plusieurs sinuosités horisontales & verticales.	0	3	0	$\frac{1}{12,35}$
	0	5	3	$\frac{1}{11,37}$
Conduite partie grès, partie plomb, qui a 5 pouces de diamètre, & environ 1170 toises de longueur, avec plusieurs sinuosités horisontales & verticales.	0	5	7	$\frac{1}{23,10}$
	0	11	4	$\frac{1}{20,98}$
	1	4	9	$\frac{1}{19,49}$
	1	9	1	$\frac{1}{18,78}$
	2	1	0	$\frac{1}{18,46}$

Diamètres & longueurs des conduites.	Charges d'eau, ou hauteurs des réſervoirs, exprimées en pieds, pouces & lignes.			Rapport de la dépenſe effective à la dépenſe dépouillée de l'effet des réſiſtances.
Conduite de fer, qui a 1 pied de diamètre, & environ 600 toiſes de longueur, avec des ſinuoſités horiſontales & verticales.	12	1	3	$\frac{1}{10,08}$
Conduite de fer qui a 18 pouces de diamètre, & environ 600 toiſes de longueur, avec pluſieurs ſinuoſités horiſontales & verticales.	12	1	3	$\frac{1}{6,05}$
Conduite de fer qui a 18 pouces de diamètre, & environ 790 toiſes de longueur, avec pluſieurs ſinuoſités horiſontales & verticales.	4	7	6	$\frac{1}{10,11}$

Diamètres & longueurs des conduites.	Charges d'eau, ou hauteurs des réservoirs, exprimées en pieds, pouces & lignes.			Rapport de la dépense effective à la dépense dépouillée de l'effet des résistances.
Conduite de fer qui a 1 pied de diamètre, & environ 2340 toises de longueur, avec plusieurs sinuosités horisontales & verticales.	20	3	0	$\frac{1}{19,34}$

529. Cette table offre plusieurs termes de comparaison entre les dépenses effectives & les dépenses dépouillées des effets des résistances, selon les différens rapports qu'il y a entre les diamètres des conduites, leurs longueurs, & les charges d'eau. Lorsqu'on voudra amener de l'eau d'un réservoir à un point éloigné & placé plus bas, on choisira dans cette même table le cas le plus analogue à celui qu'on veut traiter ; & on parviendra ainsi à connoître, du moins à peu-près, les dimensions qu'il convient de donner à la conduite. Eclaircissons cela par un exemple.

530. Soit *ADCB* (Fig. 41) un amas d'eau formé de la réunion de plusieurs sources dans un même réservoir. On s'est assuré par la méthode de l'article Fig. 41.

422, ou par quelqu'autre voie équivalente, que cette quantité d'eau ainsi recueillie, est de 40000 pouces cubes en 1 minute ; & il s'agit de la conduire au point *O* par le moyen du tuyau *GEDO*. Je suppose qu'on ait reconnu par le nivellement que la plus grande hauteur *AH* ou *FO* qu'on puisse donner au réservoir *ADCB* au-dessus de la gueulebée *O*, est de 4 pieds. De plus je suppose qu'eu égard à toutes les circonstances du terrein, la conduite doive avoir 400 toises de développement ; & qu'on aura soin d'en bien adoucir les sinuosités.

Ces opérations préliminaires posées, on demande le diamètre qu'il faut donner à cette conduite, pour qu'elle prenne & amene toute l'eau que le réservoir *ADCB* peut lui fournir ?

Puisque les dépenses faites par deux tuyaux additionnels, de quelques pouces de longueur, sous une même charge d'eau, sont comme les quarrés des diamètres de ces tuyaux (409) ; & que la dépense faite par un tuyau additionnel, de 1 pouce de diamètre, sous 4 pieds de hauteur de réservoir, est de 7070 pouces cubes, en 1 minute (415) : si l'on fait la proportion, $\sqrt{7070} : \sqrt{40000} ::$ 1 pouce ou 12 lignes : un quatrième terme, ce quatrième terme qu'on trouve de 28, 54 lignes, est le diamètre qu'il faudroit donner à un tuyau additionnel pour dépenser en 1 minute les 40000 pouces cubes d'eau que le réservoir proposé peut fournir. Mais comme le tuyau *GEDO* doit avoir 400 toises de longueur, on voit par notre table que si on ne lui donnoit

pas un plus grand diamètre, il ne prendroit qu'environ la huit ou neuvième partie de l'eau, & qu'il refuferoit le furplus. Suppofons, pour nous arrêter à quelque chofe de fixe, qu'il prît alors 5000 pouces cubes d'eau feulement. J'imagine que la charge totale *AH* ou *FO* eft compofée de deux parties *AN*, *NH*, dont la première feroit paffer 5000 pouces cubes d'eau en 1 minute par un tuyau de 28, 54 lignes de diamètre & exempt de frottement, & dont la feconde *NH* ou *QO* eft deftinée à vaincre le frottement. Enfuite je cherche le diamètre *D* qu'il faudroit donner à un fecond tuyau exempt auffi de frottement pour que la première charge *AN* ou *FQ* y fît paffer 40000 pouces cubes d'eau en 1 minute; & je trouve ce diamètre par la proportion (409), $\sqrt{5000} : \sqrt{40000} :: 26, 54$ lignes : $D = 80, 73$ lignes $= 6$ pouces $8 \frac{7}{10}$ lignes environ. D'où l'on voit que fi la réfiftance du frottement pour deux tuyaux de même longueur, & dont l'un a 28, 54 lignes de diamètre, l'autre 80, 73 lignes de diamètre, étoit exprimée par la charge *NH*, la conduite propofée *GEDO* devroit avoir 80, 73 lignes de diamètre. Mais on a vu (504) que le frottement eft un peu moindre dans un gros tuyau que dans un petit. La différence ne doit pas être ici fort fenfible, & je crois qu'on ne peut guères fe tromper en donnant 6 pouces 8 lignes environ de diamètre à notre conduite pour amener au point *O*, malgré la réfiftance du frottement, les 40000 pouces d'eau que le réfervoir *ADCB* peut fournir en 1 minute.

Pour ſe ménager une certaine latitude dans ces ſortes de calculs, il eſt à propos d'employer pour hauteur du réſervoir une hauteur un peu moindre que celle qu'on peut réellement ſe procurer. La raiſon en eſt que ſi par les calculs qu'on vient d'indiquer le diamètre de la conduite ſe trouve un peu trop petit, l'eau s'élevera dans le réſervoir un peu plus haut, qu'on ne l'a ſuppoſé, en quoi il n'y a point d'inconvénient ; & que ſi au contraire le diamètre de la conduite ſe trouve un peu trop grand, l'eau s'abaiſſera un peu dans le réſervoir.

Tous ces calculs, je le répète, ne doivent pas être regardés comme extrêmement exacts, parce qu'ils ſont fondés ſur des élémens qu'on ne connoît pas avec aſſez de préciſion. Mais ils ſont admiſſibles dans la pratique : & ils ſerviront du moins à éviter, en grande partie, le haſard de faire une conduite trop étroite relativement au volume d'eau qu'elle doit porter, ou de la faire trop groſſe, & de ſe jetter par-là dans une dépenſe inutile.

531. Les tuyaux qui fourniſſent l'eau à gueulebée, en donnent une plus grande quantité que s'ils étoient garnis d'ajutages à leurs extrémités. Car la partie de la gueulebée qui eſt bouchée dans le ſecond cas, eſt un obſtacle analogue au frottement, & doit faire diminuer la dépenſe. Mais cette diminution n'empêche pas que l'eau ſortant par un ajutage ne s'élève plus haut que quand elle ſort par la gueulebée. On a déterminé (464) le diamètre que doit avoir la conduite relativement à celui de l'ajutage pour que

le jet ait toute la hauteur poſſible. Dans cette détermination, nous avons comparé les diamètres de deux ajutages à ceux de leurs conduites, & nous n'y avons pas fait entrer les effets du frottement, ou du moins nous avons ſuppoſé tacitement qu'ils y entroient de la même manière. Cette ſuppoſition eſt permiſe, lorſque les conduites deſtinées à fournir à la dépenſe des jets d'eau, n'ont pas beaucoup de longueur, comme cela arrive ordinairement. Mais ſi l'eau qui doit nourrir un jet étoit tirée de très-loin, il faudroit augmenter le diamètre de la conduite, d'une certaine quantité relative au frottement. Il n'y a ici d'autre choſe à craindre que de trop grands frais, en augmentant le diamètre de la conduite. Quand on aura fixé ce diamètre, on n'aura plus qu'à choiſir parmi pluſieurs ajutages déja connus à-peu-près, celui qui procure le plus d'élévation au jet, & qu'à l'appliquer à la ſouche.

532. On trouve par les mêmes principes les dimenſions des tuyaux deſtinés à diſtribuer les eaux d'un même réſervoir ou *Château d'eau* entre pluſieurs fontaines publiques ou particulières. On réglera le diamètre de chacun d'eux, ſur ſa longueur & ſur les ſinuoſités auxquelles la nature du terrein l'aſſujettit, comparativement à la charge d'eau. Mais comme cette détermination n'eſt pas ſuſceptible d'une exactitude rigoureuſe, on garnira les tuyaux, de robinets qui ſerviront à la rectifier, & qui étant ouverts plus ou moins, laiſſeront paſſer dans chaque tuyau, préciſément, ni plus ni moins, la quantité

d'eau qui lui revient. Le problême se résoud de la même manière, lorsqu'un tuyau principal se ramifie en plusieurs autres plus petits. Les diamètres de ceux-ci se corrigent par le moyen de robinets.

533. Mon objet n'est pas d'entrer dans les détails relatifs à l'établissement & à la construction d'une conduite. Je me borne seulement à quelques remarques générales sur ce sujet.

Lorsqu'il s'agit d'amener les eaux d'un point *A* à un autre point *B*, la première chose qu'on doit faire est de constater la possibilité du projet, ou de reconnoître si, & de combien, le point *A* est plus élevé que le point *B*. Il faut donc commencer par niveller exactement le terrein. L'instrument le plus exact & le plus expéditif qu'on puisse employer pour cela, est sans contredit le quart de cercle garni de lunettes. Mais comme ces sortes d'instrumens sont fort coûteux & difficiles à transporter, dans la pratique ordinaire on employe un niveau d'eau qui n'est autre chose qu'un tuyau de fer blanc de 7 à 8 pieds de longueur, portant à ses extrémités deux petites bouteilles de verre, dans lesquelles l'eau monte à une certaine hauteur. Les deux surfaces de l'eau qui sont toujours de niveau, font connoître si d'une station à l'autre les objets qu'on bornoye, s'élèvent ou s'abaissent par rapport à un point fixe. Il y a différentes manières de tenir l'état des coups de niveau. En voici une qui paroît fort commode & qui est en usage parmi plusieurs Ingénieurs. On sçait que les opérations du nivellement se font par parties,

& en allant de proche en proche d'un point à un autre. Tous les coups de niveau donnés vers chaque point de départ, feront mis dans une première colonne, & ceux qu'on donnera vers le point d'arrivée, feront mis dans une feconde colonne. Les diftances horifontales d'un coup de niveau à l'autre compoferont une troifième colonne. On mettra dans une quatrième colonne (qu'on peut appeller *colonne des hauteurs*), les différences qui fe trouvent entre les deux termes réciproques d'un même coup de niveau, lorfque celui vers le point de départ a un plus grand nombre de pieds, pouces, lignes, &c, que celui vers le point d'arrivée. Au contraire, lorfque le chiffre de la première colonne ou de départ eft moindre que fon correfpondant dans la feconde colonne ou d'arrivée, la différence fera mife dans une cinquième colonne (qu'on peut appeller *colonne des profondeurs*). Sur le terrein on n'écrit dans le journal des opérations que les trois premières colonnes; les deux autres fe font dans le cabinet, lorfqu'on veut mettre au net les deffeins du terrein. En prenant la différence entre la fomme des nombres qui compofent la première colonne, & la fomme des nombres qui compofent la feconde, ou bien entre la fomme des nombres qui compofent la quatrième colonne, & la fomme des nombres qui compofent la cinquième; on aura la différence de niveau entre le premier point de départ & le dernier point d'arrivée. Ces deux opérations fe fervent mutuellement de preuve; & on a de plus en détail la pente d'un point du terrein à l'autre.

534. Quand on se sera ainsi assuré qne l'eau pourra arriver du point *A* au point *B*; qu'on aura reconnu tous les endroits par où la conduite doit passer, tous les coudes qu'elle sera obligée de faire, & sa longueur totale; qu'enfin on aura jaugé la source; on déterminera le diamètre de la conduite comme il a été expliqué. Si elle doit être très-longue, il est indispensable d'y placer de distance en distance des *regards*. On sçait qu'un regard est un petit bâtiment quarré ou rond dans lequel il y a une cuve de plomb, ou faite en ciment & caillou, qui reçoit l'eau par le bout du tuyau de chasse, saillant d'une certaine quantité au-dessus de son fond, & qui la transmet à un ou plusieurs tuyaux de fuite, saillans aussi au-dessus du fond; ce qui donne moyen à l'eau de s'épurer. Au même fond est adapté un tuyau de *décharge*, garni d'un robinet qu'on ouvre de temps en temps, soit pour mettre la conduite en décharge, soit pour que les vases & autres ordures amassées au fond de la cuve ayent la liberté de s'échapper. Les regards se mettent quelquefois dans les fonds ou vallées, aux endroits où la conduite est le moins enterrée; & en ce cas leur décharge trouve aisément à s'écouler sans qu'on soit obligé de faire des puits. Mais dans les conduites qui ont plusieurs pentes & contrepentes, les regards se placent ordinairement aux parties les plus élevées. Alors on pratique une décharge au lieu le plus bas de la plongée. En ouvrant cette décharge & celle du regard précédent, on met la conduite à sec, & on a ainsi la facilité de faire à

l'aiſe les réparations dont elle peut avoir beſoin. Je n'ai pas beſoin d'ajouter que quand la cuve d'un regard eſt placée dans un fond, elle doit être fermée par en-haut pour que l'eau chaſſée par la pente puiſſe monter le long de la contrepente.

Lorſque les regards ſont placés aux ſommets des contrepentes, ils ſervent d'évents ; mais comme ils ſont toujours en petit nombre, on ne doit pas manquer de mettre des ventouſes à de moindres intervalles.

535. De tous les tuyaux qu'on peut employer pour faire une conduite, ceux de plomb ſont les meilleurs ſans contredit, parce que leur flexibilité permet d'adoucir, autant qu'il eſt poſſible, les coudes de la conduite. Pour faire de bons tuyaux de plomb, il faut trois quarts de plomb d'Angleterre & un quart de celui d'Allemagne. Autrefois on faiſoit ces tuyaux avec du plomb *laminé*, c'eſt-à-dire, avec des tables de plomb, d'une épaiſſeur uniforme, arrondies & ſoudées en longueur ; mais on a reconnu que ces tables ſont ſujettes à des ſoufflures, & depuis pluſieurs années on a abandonné l'uſage de faire ainſi les tuyaux. Aujourd'hui on les jette en moule par repriſes de 2 pieds & demi. Les petits tuyaux peuvent avoir 18 pieds de longueur ; mais dès qu'ils ont environ 3 pouces de diamètre, on ne les fait que de 10 à 12 pieds de longueur, afin de pouvoir les employer plus aiſément. Ils ſont ſujets à crever par les repriſes où il ſe trouve de la chiaſſe & du gravier. On les éprouve ainſi : on bouche l'une de leurs extré-

mités avec un tampon de bois garni de linge ; puis les ayant remplis d'eau on chaſſe dedans à coups de maillet une verge de fer garnie de rondelles de cuir d'un diamètre convenable ; les efforts du maillet font bientôt connoître les endroits foibles qu'on raccommode avec de la ſoudure. La bonne ſoudure pour le plomb doit être compoſée ordinairement d'un tiers d'étain fin d'Angleterre, & de deux tiers de plomb ; & celle dont on ſe ſert pour le cuivre eſt de moitié l'un, moitié l'autre ; le tout bien écumé.

536. Dans l'intérieur des villes, on fait les conduites en plomb. Par exemple, à Paris tous les tuyaux ſont de plomb & ſont enterrés de 3 pieds environ. On a remarqué que ceux de fer coulé ou de grès ne réſiſtent guères aux ſecouſſes occaſionnées par le mouvement des voitures. Mais comme une conduite entière en plomb, lorſqu'il faut amener les eaux d'un peu loin, coûteroit un prix exorbitant, on employe pour l'ordinaire dans la campagne des tuyaux de bois, de fer, ou de grès. Seulement on arrondit & adoucit les coudes de la conduite, lorſqu'elle en a, avec des bouts de tuyaux de plomb qui ſe raccordent de part & d'autre avec les autres.

537. Les tuyaux de bois ſe font avec des troncs d'arbres de chêne, d'orme ou d'aulne, les plus longs & les plus gros qu'on peut trouver. On perce ces troncs dans le ſens de leur longueur, avec des tarières. Il faut laiſſer à l'enveloppe un pouce, au moins, d'épaiſſeur, ſans compter l'écorce ni l'aubier. On les emboîte enſemble, en affilant le bout de l'un

& agrandiſſant le diamètre de l'autre ; & on les enduit en cet endroit de maſtic pour empêcher l'eau de filtrer & de ſe perdre.

538. Les tuyaux de fer ſont compoſés de parties ou de tuyaux qui ont environ 3 pieds de longueur. Ils s'aſſemblent les uns avec les autres, au moyen de brides qui doivent permettre aux bords de ſe joindre bien exactement.. Pour cela, les brides, d'un tuyau à l'autre, ſont diſtantes d'environ 2 lignes ; on remplit ce vuide avec du mortier à froid, & avec des rondelles de cuir ; enſuite on unit fortement les brides par le moyen de vis & d'écrous compoſés de bon fer, qui ſerrent les rondelles & appliquent les bords d'un tuyau contre ceux de l'autre.

539. Les tuyaux de grès ſont fort en uſage. Mais avant que de les employer il faut les examiner ſoigneuſement, & regarder s'ils ſont bien ſoudés en dedans & par dehors aux repriſes qui ſont vers le milieu ; s'il n'y a point de bouillons ou de ſoufflures ; s'ils ſont de bon grès, griſâtre, ni rouge ni mal cuit ; s'il n'y a point de fautes occaſionnées par de petits cailloux qui ſe trouvent dans la pâte avant la cuiſſon ; & pour dernier examen, on aura ſoin de les ſonner l'un après l'autre, car il peut ſe faire que de légères caſſures échappent aux yeux les plus clairvoyans. Leurs vis doivent avoir trois pouces, au moins, d'emboîtement. On les aſſemble avec de la filaſſe & du maſtic.

540. Après avoir réglé la pente & les ſinuoſités de la conduite, & après avoir fait choix des tuyaux

qu'on veut employer, on travaille à la construction du fossé qui doit recevoir la conduite. Ce fossé doit avoir au moins 5 pieds de largeur au fond, pour que les ouvriers puissent travailler & être servis commodément. La largeur de la tranchée doit être proportionnée à sa profondeur ; & il faut y ménager un talud convenable à la nature du terrein. Il y a des terres qu'on peut couper à plomb sur 9 à 10 pieds de profondeur ; telles sont les terres argilleuses. Toutes les autres, sans en excepter le tuf mêlé de glaise, ont absolument besoin d'être étrésillonnées, si l'on veut prévenir les écroulemens occasionnés par les pluies, écroulemens qui tuent les travailleurs, comblent la tranchée & retardent l'ouvrage.

541. Lorsque la profondeur des fouilles dans les terres aisées à ouvrir passe 18 à 20 pieds, & qu'une seule banquette ne suffit pas pour jetter la terre de la main à la main, l'on perce de 40 en 40 pas des puits bien étrésillonnés ; & l'on fait une galerie qui communique d'un puits à l'autre, & que l'on ne manque pas de bien étrésillonner aussi. Elle aura 7 pieds de haut & 6 de large, afin qu'étant voûtée & revêtue en maçonnerie, elle soit réduite à 6 pieds de hauteur & à 3 ou 4 pieds de largeur. Cette galerie dont on aura évacué les terres par le moyen des puits que l'on comble après que la maçonnerie est faite, servira non-seulement à la construction de la conduite, mais encore à sa réparation.

542. Il arrive quelquefois que la conduite est obligée de traverser une montagne. Alors on trace sur le terrein,

terrein, en ligne droite s'il eſt poſſible, le chemin qu'elle doit tenir; & de 100 en 100 toiſes on fait des puits qui ſervent à tirer les terres & à donner de l'air aux travailleurs. Il y a des terres où l'on ne peut guères fouiller plus de 20 ou 30 toiſes en avant & en galerie, ſans être obligé de ſe procurer de l'air par les puits; autrement les lumières s'éteignent & les travailleurs ſe trouvent mal, ſur-tout dans les grandes chaleurs. Les grands puits qui ſerviront aux alignemens, auront 14 pieds en quarré; & les petits qui ſerviront à donner de l'air & à tirer les terres, n'en auront que 7. On fait ces puits quarrés, pour pouvoir les étréſillonner. Dans la marne on peut pouſſer la galerie juſqu'à plus de 100 toiſes ſans inconvénient & ſans étréſillons, ſi la marne eſt bien franche.

543. Les grands puits doivent être placés aux coudes de la conduite, s'il y en a; & on parviendra ainſi à ſuivre ſous terre le tracé qu'on a fait ſur le terrein. A l'ouverture ſupérieure du puits, on poſera horiſontalement une grande règle droite & bien alignée ſur le tracé de la campagne. On la fixera ſolidement, & on laiſſera deſcendre le long du bord de cette règle deux ficelles déliées, chargées chacune d'un plomb, & diſtantes l'une de l'autre, au moins de 12 pieds; & lorſque les plombs ſeront en repos, on placera ſur l'alignement des deux cordeaux deux lumières dont on ſuivra la direction en prolongeant la galerie qui ſera par ce moyen dans la ſection verticale du tracé de la campagne. Si les

travailleurs qui viennent à la rencontre, s'y prennent de la même manière, il eſt indubitable que les deux atteliers ſe rencontreront, pourvu qu'ils obſervent bien leurs pentes qui doivent avoir été déterminées par un profil exact de la montagne, & dont on doit avoir des points au moyen des puits. Il ne faut pas meſurer la profondeur de ces puits avec une ficelle; mais à meſure qu'on les approfondira, on aura ſoin de marquer ſur l'une de leurs faces les toiſes, pieds & pouces meſurés exactement avec une règle de bois.

544. Celui qui ſera chargé de faire applanir le fond de la tranchée, n'atteindra pas la profondeur déterminée dans les profils, mais il en reſtera à 1 pied environ; après quoi il fera faire de 50 en 50 toiſes & ſuivant la pente donnée des trous au fond deſquels il placera une brique ou un caillou qui ſervira de repaire. Alors avec trois jallons égaux, à l'imitation des paveurs, il bornoyera entre deux repaires d'autres points de 12 en 12 pieds, ou plus proche s'il veut, dans leſquels il placera auſſi une brique ou un caillou, afin que les travailleurs ſuivent ces marques & ne faſſent du fond de la tranchée qu'un ſeul & même plan. Ce fond doit avoir une certaine conſiſtance pour ne pas s'affaiſſer ſous le poids de la conduite & ne la pas expoſer à ſe rompre, ſurtout lorſqu'elle eſt en grès.

545. On ſçait que les pluies & les neiges ſont les ſeules cauſes des ſources. On a l'expérience journalière que dans les années ſeches les ſources diminuent

ſenſiblement & tariſſent quelquefois. Les plus durables ſont celles qui ſortant du pied d'une montagne ſemblent venir de haut. Comme les dépenſes pour la conduite des eaux ſont conſidérables, on doit ménager les ſources avec ſoin, & en ramaſſer le plus qu'il eſt poſſible. Pour cela, on creuſe dans le terrein où l'on en ſoupçonne, des puits éloignés les uns des autres, de 20 ou 30 pas; on les joint par des tranchées ſouterreines qui reçoivent les tranſpirations & les conduiſent dans un ſeul & même endroit où l'on veut établir le premier regard. Mais il faut bien prendre garde de ne pas percer un lit de terre glaiſeuſe, de crainte de perdre l'eau. Après avoir réglé les pentes des tranchées, on met au fond un lit de glaiſe battue, & l'on fait un petit canal en pierres ſeches, de 7 à 8 pouces de largeur, ſur 8 à 9 de hauteur, recouvert de pierres plattes & de gazons renverſés par-deſſus. On garnira auſſi de terre glaiſe le pied droit extérieur de la digue pratiquée au pied de la montagne. Les eaux qui filtrent au travers des pierres ſeches ſe raſſemblent dans le canal, & vont ſe rendre au regard.

546. Lorſqu'une ſource ne monte pas aſſez haut pour pouvoir couler dans la conduite, il faut percer dans la montagne & aller au-devant pour la rencontrer, ſi l'on peut, afin de la ramener naturellement ſur un lit de glaiſe bien corroyé, ou dans une conduite de grès, ſi elle eſt unique. Quelquefois on la peut faire gonfler, en lui oppoſant une digue qui doit être faite avec de la bonne glaiſe, bien cor-

royée & damée à la demoiselle tout-au-tour avec de bons & gros cailloux pour rendre la glaise plus compacte. Il faut sur-tout que ce corroi soit assis sur le tuf glaiseux, & non sur la terre franche, autrement l'eau passeroit encore par-dessous le corroi. La digue peut être aussi un mur fait avec du caillou & du ciment.

Il y auroit encore plusieurs choses à dire sur toute cette matière ; mais on les apprendra par l'usage, ou dans les livres qui en traitent expressément.

SECTION II.

De la pression que l'eau mue dans un tuyau cylindrique, exerce contre ses parois.

Fig. 42. 547. Soit un tuyau cylindrique horisontal *EN* (Fig. 42), adapté au réservoir *ADCB*; & supposons que le réservoir étant entretenu constamment plein à la hauteur *EB*, l'eau se meuve librement dans le tuyau, sans éprouver aucune résistance : il est certain que si l'on excepte la pression qui naît du poids même de la colonne d'eau *EN*, le tuyau n'éprouve aucun effort; car la vîtesse de l'eau ayant une direction libre & horisontale, il ne peut en résulter aucune force qui s'exerce contre les parois du tuyau.

548. L'expérience rend cela sensible. Au grand réservoir qui a été décrit (319), j'ai fait planter un tuyau horisontal *EN* qui avoit 3 pieds de longueur,

& environ 9 à 10 lignes de diamètre. Vers son milieu *M* étoit pratiqué un petit trou latéral, destiné à former un jet d'eau. On étoit maître de diriger ce jet de bas en haut ou de haut en bas, ou de l'incliner à volonté, en faisant tourner le tuyau sur son axe. On entretenoit l'eau dans le réservoir à la hauteur d'environ 4 pieds au-dessus du tuyau. Lorsque le bout *N* étoit bouché, le jet avoit la hauteur ou l'amplitude telle qu'on l'a déterminée dans le Chapitre précédent. Mais quand on débouchoit le bout *N*, le jet cessoit presqu'entièrement en toutes sortes de sens. Seulement lorsque l'ouverture *M* étoit en bas, l'eau bavoit & dégouttoit un peu par ses bords. Il est clair que la cessation du jet démontre une cessation de pression contre les parois du tuyau.

549. Imaginons toujours un tuyau horisontal *EN* (Fig. 43) adapté à un grand réservoir *ADCB*, & dans lequel l'eau se meuve sans éprouver aucune résistance de la part du frottement; mais supposons qu'une partie de l'orifice *PN* soit bouchée, de manière que l'eau sorte maintenant par le petit orifice *pn*. La force qui fait passer l'eau en *EC*, du réservoir dans le tuyau, étant constamment la même, il est clair que l'eau se meut moins vîte dans le tuyau quand une partie de l'orifice extérieur *PN* est bouchée, que quand l'eau sort par la gueulebée *PN*. Or en vertu de cette diminution de vîtesse, qui a lieu dans le premier cas, il doit nécessairement résulter contre les parois du tuyau une pression qu'il s'agit de déterminer. Fig. 43.

550. Pour cela, décompoſons la colonne d'eau EN en une infinité de tranches $GFfg$ verticales & égales entr'elles. Comme nous négligeons le frottement, il eſt évident que tous les points d'une même tranche ont la même vîteſſe, & que de plus cette vîteſſe eſt la même pour toutes les tranches, puiſque de proche en proche elles ſe ſuccèdent les unes aux autres le long du tuyau. Il n'eſt pas moins clair que ſi qr repréſente la ſection de la veine contractée au ſortir de l'orifice pn, la vîteſſe dont on vient de parler eſt à celle qui a lieu en qr, comme l'aire de l'orifice qr eſt à l'aire de la ſection GF; car à chaque inſtant il paſſe par qr un petit priſme d'eau égal au priſme $GFfg$; & ces priſmes ont par conſéquent des vîteſſes réciproquement proportionnelles à leurs baſes. Donc, en nommant h la hauteur conſtante BH du réſervoir, D le diamètre du tuyau, d celui de l'orifice qr, & conſidérant que la vîteſſe en qr eſt dûe à la hauteur h & peut s'exprimer par $\sqrt{h}$; la vîteſſe de l'eau le long du tuyau ſera repréſentée par $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$.

Cela poſé, de la même manière que la vîteſſe $\sqrt{h}$ eſt produite par la preſſion h, la vîteſſe $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$ peut être regardée comme produite par la preſſion $\frac{d^4 h}{D^4}$. Or puiſque chaque point de la tranche qui couvre à chaque inſtant le fond PN tend à ſe mouvoir avec la vîteſſe $\sqrt{h}$, & ne ſe meut réellement qu'avec la

vîteſſe $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$, il doit évidemment preſſer chaque point de Pp ou de Nn ſur lequel il s'appuie, avec une force égale à la différence des preſſions qui produiſent les vîteſſes $\sqrt{h}$ & $\frac{d^2\sqrt{h}}{D^2}$. Cette preſſion ſe diſtribue également en toutes ſortes de ſens dans la maſſe d'eau EN, & contre les parois du tuyau. La preſſion que ſouffre chaque point des parois du tuyau eſt donc repréſentée par $h - \frac{d^4 h}{D^4}$.

551. Il ſuit de-là que ſi l'on fait au tuyau une ouverture très-petite par rapport à chacun des deux orifices PN, pn, l'eau jaillira par cette ouverture avec une vîteſſe dûe à la hauteur $h - \frac{d^4 h}{D^4}$. Cette hauteur s'évanouit, lorſque $d = D$, c'eſt-à-dire quand l'eau ſort à gueulebée par l'orifice PN, comme nous l'avons déja remarqué (548).

On voit par-là combien ſe trompent les Praticiens qui croyent qu'en faiſant une petite ouverture latérale à un tuyau dans lequel coule de l'eau, il doit ſortir par cette ouverture un jet qui, abſtraction faite du frottement & de la réſiſtance de l'air, s'élève à la hauteur dûe à la vîteſſe de l'eau dans le tuyau. Il peut ſe faire qu'il ne ſorte point du tout d'eau par l'ouverture en queſtion.

552. Suppoſant toujours qu'on ait fait aux parois du tuyau une petite ouverture, on trouvera ſans peine la quantité d'eau qu'elle doit fournir en un

temps donné. Car les dépenſes par une même ouverture, & en un même temps, ſont proportionnelles (245, 355) aux racines quarrées des hauteurs des réſervoirs, ou ce qui revient au même, aux racines quarrées des preſſions. Donc, ſi l'on nomme Q la dépenſe que feroit, pendant un certain temps, l'ouverture propoſée, ſous la preſſion h, q la dépenſe qu'elle fait, pendant le même temps, ſous la preſſion $h - \frac{d^4 h}{D^4}$, on aura la proportion, $Q : q :: \sqrt{h} : \sqrt{\left[h - \frac{d^4 h}{D^4}\right]}$; d'où l'on tire

$$q = Q \times \frac{\sqrt{[D^4 - d^4]}}{D^2}.$$

Or on connoît Q par les méthodes du Chapitre IV; on connoîtra donc auſſi q.

553. Cette théorie a également lieu pour les tuyaux inclinés, pourvu néanmoins que dans ce dernier cas l'ouverture pn par laquelle l'eau s'échappe du tuyau, ſoit fort petite par rapport à PN. Si cette condition n'avoit pas lieu, la vîteſſe au ſortir de pn ne ſeroit pas dûe à toute la hauteur du réſervoir ; & il faudroit commencer par déterminer h par d'autres principes que ceux que nous avons employés.

554. La même théorie peut ſervir à déterminer, du moins à-peu-près, les épaiſſeurs que doivent avoir les tuyaux de conduite, garnis d'ajutages à leurs bouts, pour réſiſter à la preſſion des eaux qu'ils mènent. En effet, la preſſion que ſouffre chaque point de la circonférence d'une ſection de notre

tuyau EN étant exprimée par $h - \frac{d^4 h}{D^4}$; il eſt clair que pour ſoutenir cette preſſion, le tuyau doit avoir la même épaiſſeur que ſi l'eau étoit dormante ſous la hauteur $h - \frac{d^4 h}{D^4}$. Or ce dernier problême ſe réſoud par la méthode de l'article 55.

On voit qu'il faut moins d'épaiſſeur à une conduite quand l'eau s'y meut, que ſi cette eau étoit dormante ſous la hauteur entière h.

555. Dans la pratique on fait les épaiſſeurs des tuyaux plus fortes que la théorie précédente ne l'exige. Ces tuyaux ſouffrent en effet pluſieurs efforts dont on ne tient pas compte dans le calcul, & qui ne peuvent pas être évalués exactement. Le choc de l'eau contre les angles de la conduite, les vents qui s'y logent & qui y ſont foulés avec force dans les pentes & les contrepentes, les défauts du plomb ou du fer, &c, exigent de la part de la conduite une réſiſtance conſidérable pour qu'il ne s'y faſſe pas de fracture. Ajoutez que dans les endroits humides la terre adjacente au tuyau le mine & le pourrit en quelque ſorte. La hauteur du réſervoir n'eſt donc pas toujours le principal élément qui doit régler l'épaiſſeur de la conduite. Voici les épaiſſeurs qu'on donne ordinairement aux tuyaux de plomb ou de fer, relativement à leurs diamètres, ſoit qu'ils ayent ou non des ajutages à leur bout.

Tuyaux de plomb.		Tuyaux de fer.	
Diamètres, exprimés en pouces.	Epaiſſeurs, exprimées en lignes.	Diamètres, exprimés en pouces.	Epaiſſeurs, exprimées en lignes.
1	2 $\frac{1}{2}$	1	1
1 $\frac{1}{2}$	3	2	3
2	4	4	4
3	5	6	5
4 $\frac{1}{2}$	6	8	6
6	7	10	7
7	8	12	8

A l'égard du poids de ces tuyaux, il eſt toujours facile à trouver, en ſe rappellant que le pied cube de plomb peſe 828 livres environ, & que le pied cube de fer forgé peſe 580 livres environ.

Il n'y a point de règle fixe pour les épaiſſeurs des tuyaux de bois ou de grès.

556. Suppoſons maintenant que l'eau ſe meuve dans le tuyau horiſontal *EN* (Fig. 42), & ſorte à gueulebée par le bout *N*, mais qu'elle éprouve en ſe mouvant la réſiſtance du frottement le long des parois du tuyau. Nous avons vu dans la ſection pré-

cédente que cette résistance diminue considérablement la dépense. On peut concevoir que le frottement retrécit le passage de l'eau à l'extrémité *N* du tuyau. Il semble donc qu'alors on pourra déterminer la pression latérale du tuyau, par la formule de l'article 550, en substituant le tuyau de la Figure 43, où il n'y a pas de frottement, à celui de la Figure 42, où il y a du frottement, & supposant que *D* représente le diamètre véritable du tuyau, *d* le diamètre réduit & diminué par le frottement. Consultons là-dessus l'expérience.

557. Au tuyau horisontal *bu* (Fig. 32) de 16 lignes de diamètre, j'ai fait en *p* une ouverture latérale d'environ $3\frac{1}{4}$ lignes de diamètre. Je dis *environ*, car comme il ne s'agit ici que de dépenses comparatives, par une même ouverture, il n'est pas nécessaire de connoître exactement cette ouverture. On a mesuré les dépenses par l'orifice *p*, le bout *u* du tuyau étant d'abord bouché, ensuite ouvert successivement à différentes distances de la caisse *x*; & on a trouvé les résultats qui suivent. Fig. 32.

Expériences I, II, III, ... VII.

558. Hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'axe du tuyau = 1 pied.

I. Le bout *u* du tuyau étant bouché, en 1 minute l'ouverture latérale *p* donne 196 pouces cubes d'eau.

II. A 30 pieds de la caisse, le bout de ce tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 171 pouces cubes d'eau.

III. A 60 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 186 pouces cubes d'eau.

IV. A 90 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 190 pouces cubes d'eau.

V. A 120 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 191 pouces cubes d'eau.

VI. A 150 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 193 pouces cubes d'eau.

VII. A 180 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 194 pouces cubes d'eau.

EXPÉRIENCES VIII, IX, X,... XIV.

559. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de l'axe du tuyau = 2 pieds.

I. Le bout *u* du tuyau étant bouché, en 1 minute l'ouverture latérale *p* donne 274 pouces cubes d'eau.

II. A 30 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 240 pouces cubes d'eau.

III. A 60 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 256 pouces cubes d'eau.

IV. A 90 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 261 pouces cubes d'eau.

V. A 120 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 264 pouces cubes d'eau.

VI. A 150 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 265 pouces cubes d'eau.

VII. A 180 pieds de la caiſſe, le bout *u* du tuyau étant débouché, en 1 minute l'ouverture *p* donne 266 pouces cubes d'eau.

RÉFLEXIONS.

560. Il eſt clair que ſi conformément à l'article 556, *d* repréſente le diamètre du tuyau par lequel l'eau eſt cenſée ſortir en *u*, ayant égard au frottement, tandis que *D* eſt le diamètre de ce tuyau, affecté ſeulement de la contraction ; il eſt clair, dis-je, que la dépenſe en *u*, altérée par le frottement, eſt à la dépenſe qui auroit lieu ſans le frottement, comme d^2 eſt à D^2. Or,

1°. Lorſque la hauteur du réſervoir = 1 pied, la dépenſe qui auroit lieu ſans le frottement, = 6330 pouces cubes en 1 minute (497). On aura donc alors (496),

à l'origine du tuyau, $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ou $d = D$;

à 30 pieds de la caiſſe, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2778}{6330}$;

à 60 pieds de la caiſſe, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1957}{6330}$;

à 90 pieds de la caiſſe, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1587}{6330}$;

à 120 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1351}{6330}$;

à 150 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1178}{6330}$;

à 180 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1052}{6330}$.

2°. Lorsque la hauteur du réservoir = 2 pieds, la dépense qui auroit lieu sans le frottement = 8939 pouces cubes en 1 minute (497). On aura donc alors (496),

à l'origine du tuyau, $\frac{d^2}{D^2} = 1$, ou $d = D$;

à 30 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{4066}{8939}$;

à 60 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2888}{8939}$;

à 90 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2352}{8939}$;

à 120 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{2011}{8939}$;

à 150 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1762}{8939}$;

à 180 pieds de la caisse, $\frac{d^2}{D^2} = \frac{1581}{8939}$.

561. Cela posé, reprenons la formule $q = Q \times \frac{\sqrt{[D^4 - d^4]}}{D^2}$ de l'article 552. La dépense Q que fait l'ouverture latérale p, le bout u du tuyau étant bouché, est de 196 pouces cubes en 1 minute, lorsque la hauteur du réservoir = 1 pied (Expé-

rience I); & de 274 pouces en 1 minute, lorſque la hauteur du réſervoir = 2 pieds, (Exp. VIII). Pour avoir les dépenſes q que fait cette même ouverture en 1 minute, lorſque le bout u du tuyau eſt débouché, on ſubſtituera à la place de $\frac{d^2}{D^2}$ ſucceſſivement les valeurs qu'on vient de trouver. On formera par-là les trois premières colonnes de la table ſuivante. La quatrième colonne contient les dépenſes effectives de l'ouverture p, telles qu'on les a trouvées par l'expérience.

Hauteurs du réſervoir, exprimées en pieds.	Longueurs du tuyau, exprimées en pieds.	Dépenſes en 1 minute, calculées par la formule, & exprimées en pouc. cubes.	Dépenſes correſpondantes, trouvées par l'expérience, & exprimées auſſi en pouces cubes.
1	30	176	171
1	60	186	186
1	90	190	190
1	120	191	191
1	150	192	193
1	180	193	194

Hauteurs du réſervoir, exprimées en pieds.	Longueurs du tuyau, exprimées en pieds.	Dépenſes en 1 minute, calculées par la formule, & exprimées en pouc. cubes.	Dépenſes correſpondantes, trouvées par l'expérience, & exprimées auſſi en pouces cubes.
2	30	244	240
2	60	259	256
2	90	264	261
2	120	267	264
2	150	268	265
2	180	269	266

562. On voit que les dépenſes calculées approchent beaucoup des dépenſes effectives, & qu'il n'eſt guères poſſible d'eſpérer un plus parfait accord dans ces ſortes de recherches. De-là ſuit une manière très-ſimple de déterminer la dépenſe d'un long tuyau horiſontal, ſujet au frottement, par celle d'une ouverture latérale pratiquée à ſes parois. Nommons x le rapport de la dépenſe du tuyau propoſé en ayant égard au frottement, à la dépenſe qu'il feroit en négligeant le frottement; ou ce qui revient au même,

ſoit

ſoit $x = \frac{d^2}{D^2}$. La formule $q = Q \times \frac{\sqrt{[D^4 - d^4]}}{D^2}$ deviendra $q = Q \sqrt{[1 - xx]}$; d'où l'on tire $x = \frac{\sqrt{[Q^2 - q^2]}}{Q}$. Cela poſé, pour trouver la dépenſe demandée, on pourra s'y prendre ainſi. On fera en un endroit quelconque des parois du tuyau une ouverture latérale de grandeur connue, & bien perpendiculaire à la direction du mouvement de l'eau ; on cherchera par les méthodes du Chap. IV la dépenſe Q de cet orifice en 1 minute, ſous la hauteur conſtante du réſervoir au-deſſus de ſon centre, & l'extrémité de décharge du tuyau étant bouchée ; on meſurera par une expérience immédiate la dépenſe q que l'orifice latéral fait en 1 minute, l'extrémité de décharge du tuyau étant ouverte. Par-là on connoîtra x. Il ne s'agira donc plus que de connoître, par le moyen du même Chapitre IV, la dépenſe que feroit le tuyau en négligeant le frottement, pour avoir ſa dépenſe en ayant égard au frottement.

Par exemple, ſuppoſons que le tuyau ait 2 pouces de diamètre; que la hauteur de l'eau dans le réſervoir au-deſſus de ſon axe ſoit de 3 pieds; que l'ouverture latérale ait 6 lignes de diamètre; que cette ouverture donne 1000 pouces cubes d'eau en 1 minute, l'eau coulant dans le tuyau. Cette même ouverture, ſuppoſée ſujette à la contraction de la première eſpèce, donneroit (374) en 1 minute, 1178 pouces cubes, l'extrémité du tuyau étant bouchée ; c'eſt-à-dire qu'on a Q = 1178 pouces cubes,

tandis que $q = 1000$ pouces cubes. Mettant ces valeurs dans l'équation $x = \frac{\sqrt{[Q^2 - q^2]}}{Q}$, on trouvera $x = 0, 5289$. Maintenant le tuyau proposé devroit donner (415), en 1 minute, 24504 pouces cubes, en négligeant le frottement; il donnera donc, en ayant égard au frottement, $0, 5289 \times 24504$ pouces cubes $= 12952$ pouces cubes.

563. Tout cela est sensiblement vrai aussi pour les tuyaux inclinés, rectilignes ou curvilignes, lorsque le frottement peut être censé diminuer considérablement l'orifice par lequel le fluide s'échappe. C'est en vertu de la pression occasionnée par le frottement que dans la dernière conduite de M. Couplet l'eau s'élève dans le réservoir du bout de l'aîle par le tuyau montant adapté à cette conduite. Le Lecteur déterminera sans peine la quantité d'eau que le tuyau proposé donne, & la pression que ses parois souffrent.

564. Nous avons assez fait remarquer que la pression dont il s'agit dans tout ceci est occasionnée par la perte de vîtesse que l'eau fait dans la conduite. Ainsi lorsqu'on détermine cette pression par la dépense que fait un orifice latéral, il faut que cet orifice soit percé bien perpendiculairement à la direction de l'eau, sans quoi une partie de l'écoulement seroit produite par le mouvement même du fluide.
Fig. 44. La conduite *AMB* (Fig. 44) offre l'exemple d'un tel écoulement, par l'ouverture latérale *M*.

CHAPITRE VII.

Du mouvement des eaux dans des canaux.

565. Les canaux dont il est question sont ouverts par en-haut ; & la surface de l'eau a la liberté de s'élever ou de s'abaisser. Or en vertu de cette liberté le fluide peut tirer de son propre poids une vîtesse qui se combine avec celle qui lui reste de l'impulsion initiale. Le frottement ne doit donc pas suivre ici exactement les mêmes loix que dans les tuyaux de conduite où l'eau est comprimée de tous côtés, & se meut suivant une seule & même direction déterminée. On a beaucoup écrit sur ce sujet. Je vais exposer d'abord mes propres recherches ; ensuite je rapporterai les principaux moyens que divers Auteurs ont proposés pour mesurer la vîtesse des courants.

SECTION I.

Mesure de la vîtesse de l'eau dans un canal rectangulaire.

566. Lorsqu'un fluide passe d'un réservoir dans un canal, par un pertuis qui n'est pas fort grand, chaque molécule tend à se mouvoir, au premier inst-

tant, avec une vîteſſe dûe à la hauteur de réſervoir, qui lui répond. Si elle étoit donc un corps iſolé & librement mobile dans le canal, elle prendroit & conſerveroit cette vîteſſe, & de plus en acquerroit une nouvelle par la pente du canal, lorſqu'il en a. Mais il paſſe à chaque inſtant par le pertuis un amas de molécules qui agiſſent les unes ſur les autres, & qui troublent leurs mouvemens réciproques. La veine eſt ſujette à la contraction, au frottement & à la réſiſtance de l'air. Toutes ces cauſes influent ſur la vîteſſe, & il eſt difficile de la déterminer exactement, quand le canal eſt d'une figure irréguliere, comme on le verra ci-deſſous.

567. Pour parvenir à des réſultats ſimples & facilement comparables à la théorie, je conſidère ici le mouvement de l'eau dans un canal rectangulaire. Fig. 45. Sur la face verticale *BC* (Fig. 45) du réſervoir *ADCB* qui a été décrit (319), & au raz du fond *DC*, eſt pratiquée une ouverture *EC* garnie d'une vanne rectangulaire de cuivre, qui ſe hauſſe & ſe baiſſe à volonté. L'orifice par lequel l'eau ſort eſt un rectangle qui a conſtamment 5 pouces de baſe horiſontale, mais dont la hauteur varie ſuivant qu'on leve plus ou moins la vanne. Les faces latérales de cet orifice ſont de cuivre, & forment deux plans verticaux, parallèles entr'eux, & perpendiculaires à la paroi dont *BC* eſt le profil. On meut la pale en-dehors, au moyen d'un crochet qui lui eſt attaché, & d'un levier qui tourne ſucceſſivement ſur deux appuis propres à la hauſſer ou à la baiſſer. On empêche

cette même pale de monter plus haut qu'il ne faut, par des clous fichés dans la plaque de cuivre ſur laquelle elle coule, leſquels lui ſervent d'arrêts & lui permettent ſeulement d'arriver à la hauteur préciſe qu'on demande. Il eſt vrai que lorſqu'on veut changer la hauteur de l'orifice, on perd quelque temps à ôter ou à remettre ces clous; mais cette manœuvre a paru préférable à toute autre, par la facilité qu'elle donne de lever en un inſtant la pale pour chaque opération.

568. A l'orifice *EC* eſt adapté un canal rectangulaire *EF* de 105 pieds de longueur, & ouvert par en-haut. La largeur du fond de ce canal eſt de 5 pouces juſtes, & la hauteur d'environ 8 à 9 pouces. Il s'applique parfaitement à l'orifice. Lorſqu'il eſt dans la poſition horiſontale, ſon fond eſt dans le même plan horiſontal que le fond du réſervoir. Dans toutes les ſituations, ſes parois intérieures ſont les prolongemens des faces latérales de l'orifice. Le fond eſt compoſé de forts madriers aſſemblés bout-à-bout, bien polis & bien dreſſés; les parois ſont de planches de ſapin. On a eu ſoin de mettre au-deſſus du canal de 2 en 2 pieds des traverſes qui contiennent les parois & les empêchent de ſe déverſer.

Ce canal eſt deſtiné, comme on voit aſſez, à meſurer la vîteſſe de l'eau qui le parcourt. Il a été d'abord poſé horiſontalement, enſuite on l'a incliné ſucceſſivement à l'horiſon. Dans tous les cas, l'eau étoit entretenue dans le réſervoir à la même hauteur pour

la même expérience, mais à différentes hauteurs pour différentes expériences. Elle étoit fournie dans le réservoir, comme il a été dit dans l'article 319.

569. Lorsque l'eau étoit à sa plus grande hauteur dans le réservoir, & qu'il falloit l'entretenir quelque temps en cet état, on avoit mis au bout du canal de communication de la cuve ronde avec le réservoir, une planche disposée de maniere qu'elle brisoit le choc de l'eau, & que la surface supérieure de l'eau contenue dans le réservoir demeuroit calme. Mais lorsqu'il falloit entretenir l'eau dans le réservoir à une autre hauteur constante; par exemple, à celle de 7 pieds 8 pouces, on attachoit aux parois du réservoir une espèce de caisse mobile, ouverte par en-haut, qui recevoit le choc de l'eau, & qui la renvoyoit par une pente douce à la hauteur convenable dans le réservoir, sans causer d'ébranlement sensible à la surface, & encore moins dans la masse de l'eau inférieure. Sur les côtés du réservoir étoient pratiqués des dégorgeoirs qui servoient à maintenir l'eau à la hauteur précise qu'on vouloit. De plus on étoit attentif que l'eau atteignît sans cesse, & ne passât jamais un clou qui marquoit la limite de la hauteur; & la même personne qui étoit chargée de ce soin, fournissoit de l'eau à volonté, au moyen d'un levier qu'elle manœuvroit, & qui haussoit ou baissoit la pale de la cuve ronde.

570. Ces préparatifs établis, quand on a voulu mesurer la vîtesse de l'eau dans le canal, la première idée a été d'y mettre un morceau de liege ou de

quelqu'autre matière lègère ; mais on a bientôt reconnu l'insuffisance de cette méthode, du moins quand le canal est horisontal. Car alors l'eau se gonfle à mesure qu'elle chemine, chasse le petit corps flottant de côté & d'autre, & ne lui permet pas de suivre directement son fil. On a essayé de jetter dans l'eau des matières colorées, telles que du sang, du charbon pilé, &c. Mais cela est encore défectueux, parce que l'eau délaye trop facilement ces matières, & rend leur arrivée incertaine. Le moyen auquel je me suis arrêté, a été de déterminer le temps qui s'écoule depuis l'instant où l'on lève la vanne placée à l'orifice *CE*, jusqu'à celui où l'eau arrive à différens points du canal. Ce moyen ne donne à la vérité que la vîtesse de la première eau qui parcourt le canal, & on sent que quand l'écoulement est parfaitement établi, il est plus rapide qu'au commencement. Mais les deux vîtesses ont entr'elles un rapport qui est constant, du moins à-peu-près, comme on le verra dans plusieurs cas où l'on peut les déterminer l'une & l'autre. D'où il résulte que l'une seulement étant donnée en certains cas, on pourra en conclure aussi l'autre sensiblement.

571. Nous avons déja dit que la longueur totale du canal est de 105 pieds. On la divise en cinq parties égales, & en trois parties égales, de manière que chacune des cinq parties égales est de 21 pieds, & que chacune des trois parties égales est de 35 pieds. Pour s'assurer de l'arrivée de la première eau à chaque point de division, on y a mis des moulinets (sem-

blables à ceux qui ſervent de jouets aux enfans), dont les palettes verticales ſont frappées par l'eau. Le ſignal que ces palettes donnent par leur dérangement de la ſituation verticale eſt très-prompt & très-ſûr. Il eſt apperçu par la perſonne qui compte les oſcillations du pendule.

Le ſigne ± écrit après un certain nombre de ſecondes ou de demi-ſecondes indique que ce nombre eſt un peu foible ou un peu fort. Ces mots *pale élevée de ½ pouce* ou de 1 *pouce*, &c, ſignifient que l'orifice par lequel l'eau paſſe du réſervoir dans le canal eſt un rectangle de 5 pouces de baſe ſur ½ pouce ou 1 pouce de hauteur, &c. Le reſte eſt clair de ſoi-même.

EXPÉRIENCE I.

572. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond eſt de 11 pieds 8 pouces; le canal eſt horiſontal, & la pale eſt élevée de ½ pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	2	21
	5 —	42
	10 —	63
	16 —	84
	23 +	105

On voit que les temps ſucceſſifs employés à parcourir chaque eſpace de 21 pieds ſont exprimés reſ-

pectivement par les nombres ſuivans, 2, 3 —, 5, 6, 7 +, qui forment à très-peu-près une progreſſion arithmétique croiſſante qui a 1 pour raiſon. Ainſi on pourra continuer cette ſuite, & déterminer, du moins à très-peu-près, le temps que l'eau mettroit à parcourir un nombre quelconque de pieds, ſi le canal étoit prolongé indéfiniment.

EXPÉRIENCE II.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
573. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond, eſt de 7 pieds 8 pouces ; le canal eſt horiſontal, & la pale eſt élevée de ½ pouce.	3 —	21
	7	42
	13 —	63
	20 —	84
	28 +	105

Les deux ſuites de temps & d'eſpaces parcourus ſont faciles à continuer, & par conſéquent on peut déterminer à très-peu-près le temps que l'eau mettroit à parcourir un nombre quelconque de pieds, ſi le canal étoit prolongé indéfiniment. Le Lecteur fera de lui-même ces ſortes de remarques dans les expériences ſuivantes.

EXPÉRIENCE III.

574. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond, est de 3 pieds 8 pouces; le canal est horisontal, & la pale est élevée de $\frac{1}{2}$ pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	3 +	21
	9	42
	17 +	63
	27 +	84
	38 +	105

EXPÉRIENCE IV.

575. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond, est de 11 pieds 8 pouces; le canal est horisontal, & la pale est élevée de 1 pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	2	21
	4	42
	7	63
	11	84
	$16\frac{1}{4}$	105

EXPÉRIENCE V.

576. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond, est de 7 pieds 8 pouces; le canal est horisontal, & la pale est élevée de 1 pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	2 +	21
	5	42
	9	63
	14	84
	20	105

EXPÉRIENCE VI.

577. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond, est de 3 pieds 8 pouces; le canal est horisontal, & la pale est élevée de 1 pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	3 —	21
	6 +	42
	11 +	63
	18 +	84
	26	105

RÉFLEXIONS.

578. Pour connoître le déchet que la vîtesse du courant peut souffrir, commençons par chercher cette vîtesse, abstraction faite de toute résistance.

Le fluide éprouve, au passage de l'orifice, une contraction de la première espèce qui diminue la dépense naturelle dans le rapport de 8 à 5; ou ce qui revient au même, la section de la veine contractée est un rectangle dont l'aire est à celle de l'orifice véritable, comme 5 est à 8. Ces deux rectangles sont semblables, au moins sensiblement. Comme en-delà du point de contraction l'eau joint & suit le fond & les parois du canal, & que la veine doit se dilater à-peu-près de même qu'elle s'est d'abord contractée, il est clair qu'alors chaque section de l'eau est un rectangle qu'on peut regarder encore comme semblable aux deux précédens. Donc, puisqu'en un même temps il passe la même quantité d'eau par la section de la veine contractée & par une section quelconque de l'eau dans le canal, les deux vîtesses correspondantes à ces deux endroits, sont entr'elles dans le rapport de 8 à 5. Ainsi, en nommant H la hauteur BE du réservoir, hauteur qui est dûe à la vîtesse de l'eau au point de contraction, h la hauteur dûe à la vîtesse du courant dans le reste du canal; & considérant que les vîtesses sont comme les racines quarrées des hauteurs qui leur sont dûes : on aura la proportion, $\sqrt{H} : \sqrt{h} :: 8 : 5$. Par conséquent $h = H \times \frac{25}{64}$.

579. On ſçait (235, n°. 3) qu'un corps grave tombant de 15 pieds de hauteur en 1 ſeconde, acquiert par cette chûte une vîteſſe capable de lui faire parcourir uniformément 30 pieds en 1 ſeconde. De plus on ſçait que les temps des mouvemens uniformes ſont comme les eſpaces parcourus diviſés par les vîteſſes. Donc, ſi l'on nomme en général E l'eſpace parcouru uniformément par un mobile, pendant le temps t, avec une vîteſſe dûe à la hauteur h; & qu'on exprime E & h en pieds: on aura, $t : 1'' :: \frac{E}{\sqrt{h}} : \frac{30}{\sqrt{15}}$. Donc $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15h}}$.

En ſuppoſant que E ſoit l'eſpace parcouru par l'eau dans le canal, & mettant pour $\sqrt{h}$ ſa valeur $\frac{5\sqrt{H}}{8}$, on aura $t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}$.

580. La formule générale $t = 1'' \times \frac{E}{2\sqrt{15h}}$ donne $h = \frac{E^2}{60t^2}$. D'où l'on voit que ſi un eſpace E eſt parcouru uniformément pendant le temps connu t exprimé en ſecondes, la hauteur dûe à la vîteſſe du mobile eſt repréſentée par $\frac{E^2}{60t^2}$.

581. Tout cela poſé, cherchons par la formule $t = 1'' \times \frac{4E}{5\sqrt{15H}}$ le temps que l'eau devroit employer à parcourir le canal, ſi rien ne s'oppoſoit à ſon mouvement. On trouvera,

pour les expériences I & IV, $t = 6'', 350$,
pour les expériences II & V, $t = 7'', 834$,

pour les expériences III & VI, $t = 11''$, 330.

582. En comparant ces temps avec ceux que l'expérience donne réellement, on voit,

1°. Que la résiſtance des obſtacles répandus le long du canal produit une rétardation conſidérable dans la vîteſſe que l'eau devroit naturellement avoir. Cette réſiſtance vient, pour la plus grande partie, du frottement; mais l'air y entre auſſi pour quelque choſe.

2°. Que la réſiſtance des obſtacles eſt d'autant moins ſenſible, que la pale eſt plus élevée, ou qu'il ſort une plus grande quantité d'eau. La raiſon en eſt qu'eu égard à la ſurface préſentée à l'action du frottement ou au choc de l'air, une grande maſſe a plus de force qu'une petite pour vaincre ces obſtacles, les vîteſſes qui animent les deux maſſes étant ſuppoſées égales.

583. Il s'en faut beaucoup que dans chaque expérience la vîteſſe du courant ne ſoit uniforme, ou que chacune des diviſions égales du canal ne ſoit parcourue dans le même temps. La vîteſſe diminue à meſure que l'eau s'éloigne du réſervoir. Ce mouvement a quelques particularités qui méritent d'être obſervées. Lorſqu'on leve la pale, l'eau eſt lancée ſuivant la
Fig. 46. direction *CF* du canal (Fig. 46), & n'a d'abord que cette direction. Mais comme en cheminant elle éprouve de la réſiſtance, elle ſe gonfle, ſa ſurface prend la forme *EMG*; alors elle retombe par ſon propre poids depuis le point le plus élevé *M*, & une partie de l'eau revient du côté du réſervoir ſuivant la direction *MN*. Il y a donc ainſi dans la partie *CM*

du canal deux courans qui vont en ſens contraires, l'un formé par l'eau inférieure qui va dans le ſens *C F*, l'autre par l'eau ſupérieure qui revient dans le ſens *MN*. Celui-ci eſt très ſenſible, lorſqu'il commence. Il ſe termine au point *N* diſtant d'environ 12 pieds de l'orifice *E C*. Peu à peu il diminue, quoique toujours ſubſiſtant; & la ſurface de l'eau finit par prendre la forme *ERG*, où le point *R* eſt le plus élevé au-deſſus du fond. L'eau qui arrive à chaque inſtant du réſervoir, frappe continuellement en *NO* la maſſe *NOFG*, ſe mêle avec elle, & cette maſſe qui ſe renouvelle ſans ceſſe conſerve la même figure. Les courans dont nous venons de parler, ſont un exemple ſenſible de ceux qui doivent ſe former dans une rivière, dans la mer, toutes les fois que l'eau eſt retardée par des obſtacles. On voit que dans ces cas-là, l'eau doit ſe gonfler d'abord, & qu'enſuite ſon poids la forçant à ſe répandre, il réſulte de-là des courans qui peuvent avoir toutes ſortes de directions.

584. Quoique la vîteſſe de l'eau éprouve, comme nous le venons de voir, une rétardation conſidérable, & d'autant plus conſidérable que le canal eſt plus long, la dépenſe ne diminue pas pour cela. L'écoulement qui ſe fait continuellement par l'orifice n'eſt point ralenti par l'eau du canal, parce que cette eau ayant la liberté de s'échapper ou de s'élever, ne peut oppoſer à celle qui la ſuit qu'une réſiſtance comme infiniment petite. Cela eſt évident de ſoi-même. Néanmoins j'ai cru devoir en faire l'expérience. Elle m'a fait voir qu'on reçoit pendant

un temps donné, à l'extrémité *F* du canal, la même quantité d'eau qu'a la priſe *EC* quand le canal eſt tout-à fait enlevé. Il y a donc une différence très-remarquable entre le mouvement de l'eau dans un tuyau fermé de tous côtés, & le mouvement dans un canal ouvert par en-haut. Dans le premier cas, la dépenſe diminue, & diminue d'autant plus que le tuyau devient plus long; au lieu que dans le ſecond elle eſt toujours la même, quelle que ſoit la longueur du canal.

585. Sous une même vîteſſe initiale du fluide, les canaux qui ont de la pente ſont parcourus en moins de temps que les canaux horiſontaux; parce que la pente donne lieu à une accélération produite par la peſanteur relative. Les expériences qui ſuivent nous feront connoître la loi que les vîteſſes ſuivent alors. Par la *pente du canal*, j'entendrai toujours la diſtance verticale de l'une de ſes extrémités à la ligne horiſontale qui paſſe par l'autre extrémité.

EXPÉRIENCE VII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
586. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond, eſt de 11 pieds 8 pouces; la pente du canal eſt de 3 pouces, & la pale eſt élevée de $\frac{1}{2}$ pouce.	4 11 + 22	35 70 105

EXPÉRIENCE VIII,

EXPÉRIENCE VIII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
587. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond, est de 7 pieds 8 pouces; la pente du canal est de 3 pouces, & la pale est élevée de ½ pouce.	4 +	35
	14 +	70
	26	105

EXPÉRIENCE IX.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
588. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond, est de 3 pieds 8 pouces; la pente du canal, de 3 pouces; la pale est élevée de ½ pouce.	6 +	35
	18 +	70
	34 +	105

EXPÉRIENCE X.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
589. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 11 pieds 8 pouces; la pente du canal, de 6 pouces; la pale élevée de ½ pouce.	3 ½	35
	11 ½	70
	21	105

EXPÉRIENCE XI.

590. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pouces ; la pale élevée de $\frac{1}{2}$ pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	4 +	35
	14	70
	25 +	105

EXPÉRIENCE XII.

591. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir, est de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pouces ; la pale élevée de $\frac{1}{2}$ pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	6	35
	18 —	70
	31 +	105

EXPÉRIENCE XIII.

592. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pouces ; la pale élevée de 1 pouce.	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
	3	35
	8	70
	15	105

EXPÉRIENCE XIV.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
593. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pouces ; la pale élevée de 1 pouce.	4 —	35
	9 +	70
	19 —	105

EXPÉRIENCE XV.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
594. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pouces ; la pale élevée de 1 pouce.	5 —	35
	13 —	70
	23 —	105

EXPÉRIENCE XVI.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
595. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 1 pied ; la pale élevée de 1 pouce.	3 —	35
	$7\frac{1}{2}$	70
	14	105

EXPÉRIENCE XVII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
596. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, 1 pied ; la pale élevée de 1 pouce.	4 —	35
	9	70
	16	105

EXPÉRIENCE XVIII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
597. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 1 pied ; la pale élevée de 1 pouce.	5 —	35
	12	70
	21	105

EXPÉRIENCE XIX.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
598. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 2 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	2 +	35
	7	70
	13	105

EXPÉRIENCE XX.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
599. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 2 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	4 —	35
	9 —	70
	15 —	105

EXPÉRIENCE XXI.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
600. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 2 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	$4\frac{1}{2}$	35
	$10\frac{1}{2}$	70
	$17\frac{1}{2}$	105

EXPÉRIENCE XXII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
601. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 4 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	2 +	35
	$6\frac{1}{2}$	70
	12	105

EXPÉRIENCE XXIII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
602. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 4 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	3 +	35
	8	70
	13	105

EXPÉRIENCE XXIV.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
603. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 4 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	4 +	35
	9 +	70
	15 +	105

EXPÉRIENCE XXV.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
604. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	2 +	35
	6	70
	10	105

EXPÉRIENCE XXVI.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
605. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	3 +	35
	7 +	70
	12	105

EXPÉRIENCE XXVII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
606. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 6 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	4	35
	9 —	70
	14 —	105

EXPÉRIENCE XXVIII.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
607. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 9 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	2 +	35
	6 —	70
	9	105

EXPÉRIENCE XXIX.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
608. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 9 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	3 +	35
	$6\frac{1}{2}$	70
	10	105

EXPÉRIENCE XXX.

	Secondes.	Nombre de pieds parcourus.
609. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 9 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	4 —	35
	8 —	70
	12 —	105

EXPÉRIENCE XXXI.

	Demi-ſecondes.	Nombre de pieds parcourus.
610. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 9 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	7 +	35
	15	70
	23	105

Expérience XXXII.

	Demi-secondes.	Nombre de pieds parcourus.
611. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir, est de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 9 pieds ; la pale élevée de ½ pouce.	9	35
	19	70
	30	105

Expérience XXXIII.

	Demi-secondes.	Nombre de pieds parcourus.
612. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, 11 pieds ; la pale élevée de ½ pouce.	2	21
	7	42
	12	63
	17	84
	21 +	105

EXPÉRIENCE XXXIV.

	Demi-ſecondes.	Nombre de pieds parcourus.
613. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de $\frac{1}{2}$ pouce.	3 +	21
	8 +	42
	13 +	63
	18 +	84
	23 +	105

EXPÉRIENCE XXXV.

	Demi-ſecondes.	Nombre de pieds parcourus.
614. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de $\frac{1}{2}$ pouce.	4 +	21
	10	42
	16	63
	22	84
	28	105

EXPÉRIENCE XXXVI.

	Demi-ſecondes.	Nombre de pieds parcourus.
615. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	2 5 9 13 17	21 42 63 84 105

EXPÉRIENCE XXXVII.

	Demi-ſecondes.	Nombre de pieds parcourus.
616. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	3 + 7 11 15 19	21 42 63 84 105

EXPÉRIENCE XXXVIII.

	Demi-secondes.	Nombre de pieds parcourus.
617. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de 1 pouce.	3	21
	8	42
	13	63
	18 —	84
	22	105

EXPÉRIENCE XXXIX.

	Demi-secondes.	Nombre de pieds parcourus.
618. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir, est de 11 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de $\frac{3}{2}$ pouces.	2	21
	5	42
	8 +	63
	12	84
	15 +	105

EXPÉRIENCE XL.

	Demi-secondes.	Nombre de pieds parcourus.
619. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 7 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de $\frac{3}{2}$ pouces.	3 −	21
	6	42
	10 −	63
	13 +	84
	17	105

EXPÉRIENCE XLI.

	Demi-secondes.	Nombre de pieds parcourus.
620. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir eſt de 3 pieds 8 pouces ; la pente du canal, de 11 pieds ; la pale élevée de $\frac{3}{2}$ pouce.	3 +	21
	7	42
	11 +	63
	15	84
	20	105

RÉFLEXION.

621. Il n'eſt queſtion dans toutes ces expériences que de la première eau qui parcourt le canal. Cette eau éprouve une réſiſtance conſidérable de la part du frottement, parce qu'elle heurte ſans ceſſe des pointes, ou comble des cavités. Mais on conçoit qu'elle doit former tout le long du canal une eſpèce d'enduit qui en applanit le fond & les parois, & que par-là elle favoriſe l'écoulement de l'eau ſuivante. La vîteſſe du courant doit donc être ſenſiblement plus grande, quand il eſt bien établi & permanent, que dans les commencemens. On en va juger par les expériences ſuivantes. Pour meſurer la vîteſſe permanente, on a poſé légèrement ſur l'eau quatre morceaux de liege qui en ſuivent exactement le cours, & qui prennent ſenſiblement toute ſa vîteſſe. La première diviſion du canal eſt toujours parcourue en un peu moins de temps que les autres.

EXPÉRIENCE XLII.

622. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 11 pieds 8 pouces; pente du canal = 10 pieds 6 pouces; élévation de la pale = $\frac{1}{2}$ pouce.

La première eau parcourt le canal entier en 22 demi-ſecondes; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 19 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 19 eſt à 22, environ.

EXPÉRIENCE XLIII.

623. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 7 pieds 8 pouces ; pente du canal = 10 pieds 6 pouces ; élévation de la pale = $\frac{1}{2}$ pouce.

La première eau parcourt le canal entier en 24 demi-ſecondes ; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 21 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 21 eſt à 24, environ.

EXPÉRIENCE XLIV.

624. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 3 pieds 8 pouces ; pente du canal = 10 pieds 6 pouces ; élévation de la pale = $\frac{1}{2}$ pouce.

La première eau parcourt le canal entier en 28 $\frac{1}{2}$ demi-ſecondes ; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 25 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 25 eſt à 28 $\frac{1}{2}$, environ.

EXPÉRIENCE XLV.

625. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 11 pieds 8 pouces ; pente du canal = 10 pieds 6 pouces ; élévation de la pale = 1 pouce.

La premiere eau parcourt le canal entier en 17 $\frac{1}{2}$ demi-ſecondes ; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 14 $\frac{1}{2}$ demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 14 $\frac{1}{2}$ eſt à 17 $\frac{1}{2}$, environ.

EXPÉRIENCE XLVI.

626. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 7 pieds 8 pouces ; pente du canal = 10 pieds 6 pouces ; élévation de la paie = 1 pouce.

La première eau parcourt le canal entier en 19 $\frac{1}{2}$ demi-ſecondes ; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 16 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 16 eſt à 19$\frac{1}{2}$, environ.

EXPÉRIENCE XLVII.

627. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 3 pieds 8 pouces; pente du canal = 10 pieds 6 pouces; élévation de la pale = 1 pouce.

La première eau parcourt le canal entier en 22 $\frac{3}{4}$ demi-ſecondes; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 19 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 19 eſt à 22 $\frac{3}{4}$, environ.

EXPÉRIENCE XLVIII.

628. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 11 pieds 8 pouces; pente du canal = 10 pieds 6 pouces; élévation de la pale = 18 lignes.

La première eau parcourt le canal entier en 16 demi-ſecondes; & les quatre morceaux de liege le parcourent en 13 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 13 eſt à 16, environ.

EXPÉRIENCE XLIX.

EXPÉRIENCE XLIX.

629. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 7 pieds 8 pouces; pente du canal = 10 pieds 6 pouces; élévation de la pale = 18 lignes.

La première eau parcourt le canal entier en 17 ½ demi-ſecondes; & les quatre morceaux de liége le parcourent en 14 ½ demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 14 ½ eſt à 17 ½, environ.

EXPÉRIENCE L.

630. Hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir = 3 pieds 8 pouces; pente du canal = 10 pieds 6 pouces; élévation de la pale = 18 lignes.

La première eau parcourt le canal entier en 20 ½ demi-ſecondes; & les quatre morceaux de liége le parcourent en 17 demi-ſecondes.

Ainſi la vîteſſe primitive eſt à la vîteſſe permanente, comme 17 eſt à 20 ½, environ.

REMARQUE.

631. Toutes les expériences que je viens de rapporter, furent faites dans les mois de Septembre & d'Octobre 1764. Je les incorporai dans un Mémoire que j'envoyai peu de temps après à l'Académie Royale des Sciences de Toulouſe, & qui remporta en 1765 le prix que cette Académie avoit attaché à la recherché des loix du frottement des fluides en mouvement. L'année ſuivante 1766, je fis de nouvelles expé-

riences ſur la même matière, en me ſervant d'un canal de même largeur & de même hauteur que le précédent, mais de 600 pieds de longueur. Ce canal tiroit l'eau du réſervoir *HKLM* (Fig. 31), dont il a été parlé (491); & l'eau étoit entretenue à une hauteur conſtante dans ce même réſervoir *HKLM* au moyen de l'amas proviſionnel contenu dans le baſſin *FEDG*. Les autres préparatifs ſont à-peu-près les mêmes que dans les articles 567, 568, 569, 570, 571. J'ajouterai ſeulement qu'ici les ſignaux ont été donnés par des hommes apoſtés aux diviſions égales du canal. Ces ſignaux ne ſont pas ſi ſûrs que ceux dont je me ſuis ſervi précédemment; mais comme toutes les expériences ont été répétées pluſieurs fois, & qu'enſuite je les ai diſcutées avec le plus grand ſoin, rejettant celles qui me paroiſſoient douteuſes, évaluant les petites erreurs dont les meilleures pouvoient être ſuſceptibles; les réſultats que je vais rapporter méritent la confiance du Lecteur.

Dans les petites tables qui ſuivent, les mots *première eau*, indiquent qu'il s'agit de la vîteſſe de l'eau, meſurée depuis l'inſtant qu'on leve la pale, juſqu'à celui où l'eau arrive à chaque point de diviſion du canal: les mots *cours établi*, indiquent qu'il s'agit de la vîteſſe de l'eau, lorſqu'elle a pris un cours régulier & permanent. Cette vîteſſe a été meſurée par le moyen de petits corps très-légers, flottans ſur le canal.

Expérience LI.

632. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond du canal eſt de 4 pieds ; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 1 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	10	100	8	100
	20 +	200	17	200
	31 —	300	26	300
	42 —	400	35	400
	52 $\frac{1}{2}$	500	43 +	500
	62 +	600	52	600

Expérience LII.

633. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond du canal eſt de 4 pieds ; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 2 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	8	100	7	100
	17	200	14 $\frac{1}{2}$	200
	26	300	22	300
	35 —	400	29 +	400
	43 +	500	37 —	500
	52 —	600	44 +	600

EXPÉRIENCE LIII.

634. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond du canal eſt de 2 pieds ; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 1 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	11	100	10	100
	23	200	20	200
	35	300	30	300
	46 +	400	40	400
	58	500	49	500
	69	600	58	600

EXPÉRIENCE LIV.

635. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond du canal, eſt de 2 pieds ; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 2 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	9	100	8 —	100
	19	200	16	200
	29	300	24	300
	39	400	32	400
	49	500	40	500
	58	600	48	600

EXPÉRIENCE LV.

636. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond du canal, eſt de 1 pied ; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 1 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	12 +	100	12	100
	25 $\frac{1}{2}$	200	23 +	200
	39	300	33	300

EXPÉRIENCE LVI.

637. La hauteur conſtante de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du fond du canal, eſt de 1 pied ; la pente du canal, $\frac{11}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 2 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	11 —	100	9	100
	22	200	18 —	200
	32 $\frac{1}{2}$	300	27	300

EXPÉRIENCE LVII.

638. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir est de 4 pouces au-dessus du fond du canal; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 1 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	15	100	13	100
	31	200	26 $\frac{1}{2}$	200
	47	300	39 $\frac{1}{2}$	300

EXPÉRIENCE LVIII.

639. La hauteur constante de l'eau dans le réservoir au-dessus du fond du canal, est de 4 pouces ; la pente du canal, $\frac{1}{10}$ de la ligne de niveau ; la pale élevée de 2 pouc.	Première eau.		Cours établi.	
	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.	Secondes.	Nomb. de pieds parcourus.
	13 $\frac{1}{2}$	100	11 $\frac{1}{2}$	100
	26 $\frac{3}{4}$	200	23	200
	39 $\frac{1}{2}$	300	33 $\frac{1}{2}$	300

RÉFLEXIONS.

640. Toutes ces expériences offrent un tableau assez étendu de pentes & de vîtesses correspondantes. On voit en général que toutes choses d'ailleurs égales, la vîtesse augmente à mesure que la pente augmente. Il faut toujours distinguer deux sortes de vîtesses, celle de la première eau qui parcourt le canal, & celle qui s'établit à demeure après que l'eau a coulé quelque temps. L'une est moindre que l'autre. Mais si l'on compare ensemble les expériences où nous les avons déterminées toutes deux, on trouvera qu'elles sont entr'elles dans un rapport qui est à-peu-près constant pour un même canal. On sent que cela doit avoir lieu en général, du moins sensiblement. Car les aspérités du canal étant les mêmes, l'eau qui sort par un même pertuis éprouve les mêmes obstacles, & doit établir son cours régulier & permanent, suivant la même loi à-peu-près, quoique la hauteur du réservoir & la pente viennent à varier. Mais il peut arriver que les vîtesses primitives, dans deux canaux différens, ne soient pas entr'elles comme les vîtesses permanentes dans les mêmes canaux, parce que le frottement peut être fort différent dans les deux cas.

641. Lorsqu'un canal a peu de pente, ni la vîtesse primitive, ni la vîtesse permanente n'est uniforme. En ce cas à mesure qu'on s'éloigne du réservoir, les parties égales du canal sont parcourues en plus de temps. Il paroît que dans notre canal l'une &

l'autre vîteſſe ne devient ſenſiblement uniforme, que quand la pente eſt environ la dixième partie de la longueur du canal. J'excepte néanmoins la première diviſion qui même alors eſt parcourue en un peu moins de temps que les autres.

642. Une queſtion à examiner, eſt de ſçavoir en quel rapport les vîteſſes varient, lorſque le pertuis demeurant le même, la pente vient à varier. Nos expériences fourniſſent la ſolution d'un grand nombre de cas particuliers de ce problême. Soient *ADCB*
Fig. 47. (Fig. 47) le réſervoir, *ECFG* le canal incliné, *EN* la hauteur dûe à la vîteſſe que l'eau devroit avoir dans le canal, en vertu de l'impulſion initiale, & au-delà du point de contraction. Soient menées les horiſontales *EO*, *NK* qui rencontrent en *O* & *K* la verticale *GK*. La partie *OG* eſt ce que nous avons appellé la pente du canal; mais comme la vîteſſe initiale de l'eau dans le canal n'eſt pas zero, que cette vîteſſe eſt dûe à la hauteur *NE*; le mouvement de l'eau eſt le même que ſi le canal étoit prolongé juſqu'en *V* où la vîteſſe initiale ſeroit zero, & que ſur la partie *VE* l'eau n'éprouvât point de frottement, ni aucune autre réſiſtance. La queſtion propoſée ſe réduit donc à trouver la loi ſuivant laquelle la vîteſſe varie, lorſque la hauteur *KG* vient à varier.

Il ſeroit trop long de diſcuter en détail toutes nos expériences, relativement à cette queſtion; bornons-nous à quelques-unes priſes au haſard; le Lecteur appliquera facilement les mêmes remarques aux autres.

643. Je considère d'abord les expériences XLV, XLVI, XLVII; & je prends les vîtesses permanentes qu'on peut regarder comme uniformes sensiblement sur toute la longueur *EG* du canal. Le pertuis est dans les trois cas un rectangle qui a 5 pouces de base sur 1 pouce de hauteur.

Dans la première expérience, on a *EG* = 105 pieds, *OG* = 10 $\frac{1}{2}$ pieds, & on trouve (578) *EN* = 4, 54 pieds = 4 pieds 6 $\frac{1}{2}$ pouces environ. Donc *KG* = 15, 04 pieds = 15 pieds 6 lig. environ. Or la formule de l'art. 580 donne 3, 496 pieds, ou 3 pieds 5 pouces 11 lignes environ, pour la hauteur dûe à la vîtesse permanente avec laquelle l'espace *EG* est réellement parcouru. Cette hauteur est moindre que *KG*, comme on voit, dans la raison de 3496 à 15040, ou de 1 à 4, 30, à peu de chose près.

Dans la seconde expérience, on a *EG* = 105 pieds, *OG* = 10 $\frac{1}{2}$ pieds, *EN* = 2, 978 pieds = 2 pieds 11 pouces 9 lignes environ, *KG* = 13, 478 pieds = 13 pieds 5 pouces 9 lignes environ; & on trouve 2, 871 pieds, ou 2 pieds 10 pouces 5 lignes environ, pour la hauteur dûe à la vîtesse permanente avec laquelle l'espace *EG* est réellement parcouru. Cette hauteur est moindre que *KG*, dans le rapport de 2871 à 13478, ou de 1 à 4, 69 à-peu-près.

Dans la troisième expérience, on a *EG* = 105 pieds, *OG* = 10 $\frac{1}{2}$ pieds, *EN* = 1, 416 pieds = 1 pied 5 pouces environ, *KG* = 11, 916 pieds = 11 pieds 11 pouces environ; & on trouve 2, 036 pieds, ou 2 pieds 5 lignes environ, pour la hauteur dûe à

la vîteſſe avec laquelle l'eſpace *EG* eſt réellement parcouru. Cette hauteur eſt à *KG*, comme 2036 eſt à 11916, ou comme 1 eſt à 5, 84.

644. Conſidérons encore les expériences LII, LIV, LVI; & prenons toujours les vîteſſes permanentes. Le pertuis eſt dans les trois cas un rectangle qui a 5 pouces de baſe ſur 2 pouces de hauteur.

Dans la première, on a *EG* = 600 pieds, *OG* = 59,702 pieds = 59 pieds 8 pouces 5 lignes environ, *EN* = 1, 53 pieds = 1 pied 6 pouces 4 lignes à-peu-près, *KG* = 61, 232 pieds = 61 pieds 2 pouces 9 lignes environ; & on trouve 3,071 pieds, ou 3 pieds 10 lignes environ, pour la hauteur dûe à la vîteſſe avec laquelle l'eſpace *EG* eſt réellement parcouru. Cette hauteur eſt à *KG*, comme 3071 eſt à 61232, ou comme 1 eſt à 19, 93, à-peu-près.

Dans la ſeconde, on a *EG* = 600 pieds, *OG* = 59, 702 pieds = 59 pieds 8 pouces 5 lignes environ, *EN* = 0, 749 pieds = 9 pouces à-peu-près, *KG* = 60, 451 pieds = 60 pieds 5 pouces 4 lignes à-peu-près; & on trouve 2, 604 pieds, ou 2 pieds 7 pouces 3 lignes environ, pour la hauteur dûe à la vîteſſe avec laquelle l'eſpace *EG* eſt réellement parcouru. Cette hauteur eſt à *KG*, comme 2604 eſt à 60451, ou comme 1 eſt à 23, 21 à-peu-près.

Dans la troiſième, l'eſpace qui a été parcouru par l'eau n'eſt que de 300 pieds, mais ſi pour comparer cette expérience aux deux précédentes on double

l'eſpace parcouru, & qu'on double auſſi le temps employé à le parcourir, on aura $EG = 600$ pieds, $OG = 59, 702$ pieds $= 59$ pieds 8 pouces 5 lignes environ, $EN = 0, 358$ pieds $= 4$ pouces 2 lignes environ, $KG = 60, 06 = 60$ pieds 9 lignes environ ; & on trouvera 2, 058 pieds, ou 2 pieds 8 lignes environ, pour la hauteur dûe à la vîteſſe avec laquelle l'eſpace EG eſt réellement parcouru. Cette hauteur eſt à KG, comme 2058 eſt à 60060, ou comme 1 eſt à 29, 45 à-peu-près.

645. Il réſulte de tous ces calculs que les hauteurs dûes aux vîteſſes dans le canal ne ſont point entr'elles comme les hauteurs correſpondantes KG. On voit que plus la hauteur initiale EN eſt grande, moins la hauteur dûe à la vîteſſe de l'eau diffère de KG; ce qui eſt une nouvelle preuve que, proportion gardée, le frottement eſt moins ſenſible ſur une grande vîteſſe que ſur une petite, & ce qui confirme l'hypothèſe que nous avons propoſée (369) ſur la nature de cette réſiſtance. Il ne feroit donc pas exact dans la pratique, de calculer la vîteſſe d'un courant d'après ſa pente. Cette vîteſſe doit être déterminée, par un expérience immédiate, dans chaque cas particulier.

646. Lorſqu'une machine hydraulique doit être mue par un courant, & que par les circonſtances du terrein, on eſt obligé de la placer à une certaine diſtance du réſervoir, il convient d'incliner le canal d'environ la dixième partie de ſa longueur, ſi l'on veut que la pente rende à l'eau la vîteſſe dé-

truite par le frottement, & que la machine reçoive la même force que ſi elle étoit placée dans le voiſinage du réſervoir.

647. Une autre queſtion à examiner, eſt de ſçavoir ſi la vîteſſe varie, lorſque la hauteur *KG* demeurant la même, la grandeur du pertuis augmente ou diminue.

Conſidérons, par exemple, les expériences LIII & LIV, dans leſquelles la hauteur *KG* eſt la même, & les aires des pertuis ſont entr'elles dans le rapport de 1 à 2. Comme dans les mouvemens uniformes les vîteſſes employées à parcourir des eſpaces égaux ſont en raiſon inverſe des temps, on voit que les vîteſſes permanentes, dans nos deux expériences, ſont entr'elles dans le rapport de 48 à 58. La vîteſſe augmente donc ſenſiblement, lorſque le pertuis augmente. On trouve le même réſultat par toutes nos expériences.

648. Quelques Auteurs ont avancé qu'en augmentant le pertuis, ou la quantité d'eau qui paſſe dans le canal, la vîteſſe doit augmenter proportionnellement; enſorte que, ſelon eux, les vîteſſes doivent ſuivre la raiſon des dépenſes. Cette aſſertion, purement gratuite, eſt très-éloignée de la vérité; car dans l'exemple que nous venons de rapporter, les dépenſes ſont entr'elles dans la raiſon de 1 à 2, tandis que les vîteſſes ſont entr'elles ſeulement dans la raiſon de 48 à 58, ou de 24 à 29.

649. D'après les expériences précédentes & les réflexions qu'elles ont occaſionnées, on peut ſe faire

une idée du mouvement des eaux dans les aqueducs, ſelon la longueur & la pente qu'ils ont. Il convient de leur donner le plus de pente qu'il eſt poſſible. Ordinairement on les fait de différentes parties horiſontales qui vont en s'abaiſſant par gradins ou reſſauts d'une diviſion à l'autre, parce que les ouvriers ont plus de facilité à travailler ſuivant une ligne de niveau, que ſuivant une ligne inclinée. Mais cet uſage eſt vicieux. Pour procurer à l'eau la facilité de s'écouler, & pour qu'elle ſoit moins expoſée à ſe geler dans les temps froids, il convient de diriger le canal en pente dans toute ſon étendue, en y ménageant de diſtance en diſtance des repos ou des réſervoirs de décharge qui reçoivent les ordures que l'eau peut charier avec elle, & qui ſervent à mettre l'aqueduc à ſec, s'il arrive qu'on ait beſoin d'y faire quelques réparations. Il convient auſſi de faire l'aqueduc plutôt profond que large, pour que l'eau ſoit aidée par ſon propre poids à vaincre le frottement.

650. Il exiſte une infinité d'aqueducs qui amenent des eaux aux villes. Les Romains en avoient fait conſtruire de magnifiques, ſoit à Rome, ſoit dans pluſieurs autres villes de leur Empire. Il y en a auſſi un grand nombre en France. Au commencement du ſiècle paſſé, la Reine Marie de Médicis fit faire celui d'Arcueil, qui ramaſſe & conduit dans une rigole l'eau de pluſieurs tranchées de recherches faites en pierrées dans les campagnes de Rungis, Paret, Coutin. Il a 7000 toiſes de longueur, & vient ſe

décharger à un Château d'eau placé près de la Porte S. Jacques à Paris. Les villes de Montpellier, Carcaſſonne, Dijon, Auxerre, &c, ſe ſont procuré de l'eau par de ſemblables aqueducs. Tout le monde connoît le fameux projet que M. de Parcieux a propoſé de conſtruire un aqueduc pour amener les eaux de la rivière d'Yvette à Paris. La quantité d'eau que cette ville immenſe reçoit tant de l'aqueduc d'Arcueil que des Pompes du Pont Notre-Dame & de la Samaritaine, n'eſt pas à beaucoup près ſuffiſante; & tous les bons Citoyens font des vœux pour que le projet de M. de Parcieux s'exécute. Selon toutes les apparences, les difficultés qui ont empêché juſqu'ici le Gouvernement de l'adopter, diſparoîtront; & on a lieu d'eſpérer que non-ſeulement on amènera les eaux de l'Yvette au réſervoir de diſtribution que M. de Parcieux a déſigné; mais qu'on mettra enſuite dans la conſtruction des tuyaux de diſtribution toute la juſteſſe & toute l'économie poſſibles, problême plus difficile qu'il ne paroît au premier coup d'œil.

651. Finiſſons par dire un mot ſur la preſſion que l'eau mue dans un canal exerce contre ſes parois. Il eſt d'abord évident que les parois du canal empêchant l'eau de s'étendre horiſontalement en tout ſens, ſont preſſées par le poids de cette eau, & qu'à cet égard chaque point eſt preſſé perpendiculairement avec une force proportionnelle à la hauteur du fluide qui lui répond. De plus ſi la vîteſſe initiale imprimée à l'eau, ſoit par la preſſion de l'eau d'un

réservoir, soit par une chûte, vient à diminuer en vertu du frottement ou de tout autre obstacle, il résultera de cette perte de vîtesse une nouvelle pression contre les parois du canal. Il est toujours facile d'évaluer cette pression; car elle est égale à l'excès de la pression qui produiroit la vîtesse que l'eau devroit avoir naturellement, sur la pression dûe à la vîtesse effective de l'eau. De-là suit la manière de proportionner convenablement les ouvertures latérales faites à un canal ou à un aqueduc, lorsqu'on veut dériver une partie de son eau.

SECTION II.

Moyens proposés par divers Auteurs pour mesurer la vîtesse des eaux courantes.

652. Il n'a été question, dans la section précédente, que du mouvement des eaux dans des canaux ou aqueducs réguliers; & les courans que nous avons considérés, ont toujours eu assez peu de profondeur pour qu'on pût regarder la vîtesse comme la même sur toute cette profondeur. Maintenant, considérons la vîtesse dans des canaux quelconques, comme des ruisseaux, des torrents, des rivières, &c. De distance en distance cette vîtesse peut varier sensiblement; elle peut aussi n'être pas la même à la surface que sur le reste de la hauteur. Voici les principaux moyens qu'on a imaginés pour la mesurer.

Corps flottans.

653. Les corps flottans ſur l'eau prennent en très-peu de temps toute ſa vîteſſe. On peut donc meſurer la vîteſſe d'un courant, en y mettant un petit corps qui s'enfonce preſqu'entièrement, & obſervant le temps qu'il employe à parcourir un eſpace donné. Ce corps doit s'enfoncer preſqu'entièrement, pour être le moins en priſe qu'il eſt poſſible aux agitations de l'air. M. Mariotte a beaucoup employé cette méthode.

654. Ce même Auteur ayant obſervé que l'eau d'une rivière ne va pas également vîte à ſa ſurface & dans les autres parties, & que proche du fond l'eau eſt beaucoup retardée par la rencontre des pierres, des herbes & des autres inégalités, détermina ces différentes vîteſſes dans une petite rivière coulante uniformément. Il prit, pour cela, deux boules de cire attachées à un fil de 1 pied de longueur ; l'une étoit chargée de petites pierres dans le milieu pour rendre ſa peſanteur ſpécifique un peu plus grande que celle de l'eau ; enſorte que quand les deux boules étoient dans l'eau, la plus peſante faiſoit bander le fil & enfoncer la plus légère plus qu'elle n'auroit fait toute ſeule ; & par ce moyen ſa partie ſupérieure étoit preſqu'à fleur d'eau, afin que le vent n'eût point de priſe ſur elle. Il obſerva toujours que la boule d'enbas demeuroit en arriere, principalement aux endroits où il y avoit quelques herbes au fond de l'eau, près deſquelles la boule inférieure paſſoit ; car la rivière n'avoit qu'environ 3 pieds de profondeur.

deur. Mais lorſqu'on mettoit ces mêmes boules en un endroit où l'eau rencontrant quelqu'obſtacle, s'élevoit un peu & enſuite prenoit un cours plus rapide, comme on le remarque ſous les ponts; la boule inférieure devançoit la ſupérieure, ce qui fait voir qu'alors l'eau du milieu alloit plus vîte que celle de la ſurface.

On voit par cet exemple, que la vîteſſe augmente ou diminue de la ſurface au fond, ſelon les circonſtances. Naturellement la vîteſſe devroit toujours augmenter de la ſurface au fond, comme répondant à une chûte qui augmente alors de plus en plus; mais il peut ſe faire qu'elle ſoit plus retardée par les obſtacles, qu'elle n'eſt accélérée par l'augmentation de chûte.

Moulinet ou petite roue.

655. Ayez un moulinet ou une petite roue de 15 à 18 pouces de diamètre, très-légère, parfaitement mobile ſur ſon axe qui doit être fort mince, fort poli, & qu'on pourra faire tourner ſur des rouleaux pour anéantir preſque totalement l'effet du frottement. Donnez-lui 15 ou 18 petites aîles très-minces, de fer blanc. Enſuite expoſez cette machine au choc d'un courant, & comptez le nombre de révolutions qu'elle fera en un temps donné. Comme on connoît le raïon moyen de la roue, c'eſt-à-dire, la diſtance du centre au point où le choc de l'eau eſt cenſé s'exercer ſur l'aîle, on connoîtra la longueur de la circonférence moyenne, & par conſéquent l'eſpace qui

répond au temps donné, ou la vîtesse du courant.

Cette méthode a l'inconvénient de ne pouvoir donner commodément la vîtesse que vers la surface ; & que la roue en tournant est un peu retardée par la resistance de l'air. Mais elle est fort simple & peut être employée quelquefois utilement. Je m'en suis servi, comme je le dirai ci-dessous en traitant des roues hydrauliques.

Régulateur de Guglielmini.

656. Pour mesurer la quantité d'eau d'un courant, Guglielmini dans son Traité *aquarum fluentium mensura, lib.* 4, propose d'enfermer ce courant entre deux murs verticaux & parallèles, de bien applanir le fond, & de fermer, au moyen d'une vanne verticalement mobile, une partie du passage à l'eau, & de la forcer ainsi à s'écouler par le pertuis rectangulaire compris entre le fond, les deux parois, & le bas de la vanne. Ce pertuis est ce qu'il appelle le *régulateur*. La surface de l'eau au-devant de la vanne doit être sensiblement stagnante. La quantité d'eau qui passe en un temps donné par le pertuis en question, se détermine par la méthode de l'article 250; & on trouve la vîtesse moyenne de l'eau par l'article 251.

Il est évident que cette manière de déterminer la quantité des courans, n'est praticable que pour de très-petites rivières.

Tube recourbé de M. Pitot.

657. Cet instrument, dont l'Auteur donne la

defcription, Mém. de l'Acad. an. 1732, eft un tube de verre *AB* (Fig. 48), coudé en *C*, & qu'on plonge verticalement dans un courant. La hauteur *CM* à laquelle l'eau s'élève dans le tube, eft celle qui eft dûe à la vïteffe en *A* du courant. Car cette hauteur *CM* demeurant invariable, il eft clair que la preffion de l'eau *MC* fait équilibre à la force qui tend à faire monter l'eau dans le fens *ACM*, & que par conféquent la vîteffe du point *A* eft la même que fi l'eau en cet endroit étoit tombée de la hauteur *MC*. En enfonçant plus ou moins le tube, on a les hauteurs qui répondent aux vîteffes des différens points du courant. Fig. 48.

On attache le tube *AB* à une tringle de bois, très-folide ; & on met à côté une règle de cuivre, graduée, qui marque les élévations de l'eau dans le tube.

658. Rien de plus fimple que cet inftrument. L'Auteur l'a employé pour mefurer la vîteffe de la Seine fous le Pont Royal. Mais quelque précaution qu'on prenne, il eft très-difficile de le fixer affez folidement pour que l'eau ne foit pas fujette à des mouvemens d'ofcillation qui peuvent occafionner des erreurs fenfibles dans l'eftime de fes élévations. Cet inconvénient fe fait d'autant plus fentir, que le courant a plus de vîteffe, & qu'on enfonce le tube plus profondément.

Quart de cercle.

659. Le quart de cercle *ACB* (Fig. 49) dont il s'agit ici, eft garni à fon centre de deux fils, l'un affez Fig. 49.

court CP qui porte en l'air un poids P, l'autre plus long CH ou CM qui ſoutient un poids dont la peſanteur ſpécifique eſt plus grande que celle de l'eau & qui s'y enfonce plus ou moins, ſelon qu'on lâche plus ou moins le fil. Par la déviation de ce ſecond fil d'avec la verticale, on meſure d'abord la force, & on en conclut enſuite la vîteſſe du courant, comme il ſuit.

660. Ayant nommé F le poids conſtant deſtiné à être enfoncé dans l'eau, & ayant repréſenté ce poids par les verticales égales HK, MO; qu'on faſſe les parallélogrammes $HIKL$, $MNOQ$, dont les côtés HI, MN ayent même direction que le courant, & les côtés HL, MQ même direction que le fil. Il eſt clair que des deux forces dans leſquelles la force HK ou MO ſe décompoſe, il ne faut conſidérer que la force HI ou MN, l'autre HL ou MQ étant anéantie par la réſiſtance du point C. De plus on voit qu'on aura, force $HI = F \times \frac{\text{ſin. } XCR}{\text{ſin. } XRC}$, force $MN = F \times \frac{\text{ſin. } XCS}{\text{ſin. } XSC}$. D'où il ſuit, qu'en général la force égale & contraire du courant eſt le produit du poids F par le rapport du ſinus de l'angle que fait le fil avec la verticale au ſinus de l'angle que fait le fil avec le courant. Le premier angle eſt donné immédiatement par le quart de cercle. A l'égard du ſecond XRC ou XSC, il eſt toujours facile à déterminer; car ſi l'on tire l'horiſontale xy, on connoîtra l'angle yXY, puiſque la direction du courant eſt donnée. Or l'an-

gle $XRC = XxC - RXx$, & l'angle $XSC = XsC - SXs$. Lorſque la direction du courant eſt horiſontale, l'angle yXY eſt nul, & en menant les tangentes AF, AG, des angles ACF, ACG, on a $\frac{\text{ſin. } XCR}{\text{ſin. } XRC} = \frac{AF}{CA}$, $\frac{\text{ſin. } XCS}{\text{ſin. } XSC} = \frac{AG}{CA}$. D'où il ſuit qu'alors la force du courant eſt comme la tangente de l'angle formé par le fil & par la verticale.

661. Maintenant, ſi l'on ſuppoſe d'après la théorie ordinaire de la percuſſion des fluides que nous expoſerons ci-deſſous, que l'impulſion d'un fluide contre un même corps eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe de ce fluide; & qu'on nomme u la vîteſſe en H, V la vîteſſe en M : on aura en général $uu : VV ::$ $\frac{F \times \text{ſin. } XCR}{\text{ſin. } XRC} : \frac{F \times \text{ſin. } XCS}{\text{ſin. } XSC} :: \frac{\text{ſin. } XCR}{\text{ſin. } XRC} : \frac{\text{ſin. } XCS}{\text{ſin. } XSC}$.

Donc $u : V :: \sqrt{\left[\frac{\text{ſin. } XCR}{\text{ſin. } XRC}\right]} : \sqrt{\left[\frac{\text{ſin. } XCS}{\text{ſin. } XSC}\right]}$.

662. On voit que connoiſſant u, on connoîtra V. On pourra prendre & meſurer, par le moyen d'un corps flottant, la vîteſſe u à la ſurface. Cela poſé, ayant donné d'abord au fil CH une longueur telle que le corps H ne s'enfonce préciſément que de ſon diamètre; enſuite permettant à ce corps de s'enfoncer à une profondeur quelconque; on meſurera les angles XCR, XRC, XCS, XSC; & on trouvera V par la proportion précédente.

663. Cet inſtrument qui eſt fort en uſage parmi les Auteurs d'Hydraulique-pratique, demande à être employé avec précaution, ſi l'on veut qu'il donne

des résultats qui ayent quelque justesse. Le fil qui soutient le corps submergé ne conserve pas toujours la même position ; il est sujet à des mouvemens d'oscillation qui l'éloignent ou l'approchent de la verticale, & qui mettent souvent beaucoup d'incertitude dans la mesure de l'angle qu'il fait avec la même ligne. Cela arrive sur-tout, lorsque la pesanteur spécifique du corps submergé surpasse peu celle du fluide. Mais d'un autre côté il ne faut pas trop augmenter la pesanteur spécifique de ce corps par rapport à celle de l'eau; autrement les petites variations qui arrivent dans les vîtesses, ne deviendroient pas sensibles sur l'instrument.

CHAPITRE VIII.

Du cours des Rivières.

664. La recherche des loix que suivent les eaux des rivières dans leurs mouvemens, est une des branches de l'Hydraulique, qui a occasionné le plus d'ouvrages. Elle a été sur-tout cultivée par les Italiens. Comme leur pays est traversé d'un grand nombre de rivières sujettes à se déborder, on a étudié les moyens de les contenir dans leurs lits, & d'en changer ou modifier le cours, suivant le besoin. Un des meilleurs livres en ce genre, est le Traité de la nature des fleuves de Guglielmini, qui parut pour la première fois en 1697. Il a été réimprimé en 1739

avec des notes très-inſtructives de M. Euſtache Manfredi. M. de Buffon a fait pluſieurs remarques neuves & intéreſſantes au ſujet du mouvement des fleuves, dans ſon Hiſtoire Naturelle, ouvrage écrit avec une majeſté qui répond à celle des idées. Voici le résultat de mes lectures & de mes réflexions ſur la même matière.

SECTION I.

Conſidérations générales ſur le mouvement des Rivières.

665. On a diſputé long-temps ſur l'origine des fleuves, & en général ſur celle des ſources & des fontaines. Deſcartes avoit imaginé que l'eau de la mer ſe rend par des canaux ſouterrains & inclinés ſous les montagnes, dans de grandes cavités que la nature y a pratiquées ; que là échauffée par un feu qu'il ſuppoſe placé au-deſſous de ces immenſes chaudières, elle s'élève en vapeurs dans le corps même de la montagne, comme dans le chapiteau d'un alembic, & qu'enſuite après avoir dépoſé ſon ſel, elle forme un volume d'eau douce qui ſe rend par ſon poids à la mer. Mais ce ſyſtême ingénieux eſt fondé ſur des ſuppoſitions gratuites & inſoutenables. D'où pourroit naître ce feu continuel qui échauffe les chaudières, & que deviennent tous ces ſels dont l'eau ſe décharge par l'évaporation dans l'intérieur des montagnes ? Ceux qui ont dit que les eaux de la mer pénètrent

par tout à travers le globe terreſtre, & qu'après avoir dépoſé leurs ſels elles reviennent douces à la mer, ont encore plus mal rencontré. Car les eaux ne peuvent pas par elles-mêmes s'élever au-deſſus de leur niveau, ni par conſéquent former des courans qui deſcendent des lieux élevés vers la mer. Il eſt démontré & reconnu aujourd'hui de tout le monde, que les eaux des rivières & des ſources ſont fournies par les eaux pluviales qui s'amaſſent dans les cavités des montagnes; d'où elles deſcendent par leurs poids, & ſe rendent à la mer dans des canaux creuſés par l'art ou par la nature. M. Halley fait voir par le calcul, *dans les tranſactions Philoſophiques, n°. 192*, que les vapeurs qui s'élèvent au-deſſus de la mer, & que les vents tranſportent ſur la terre, ſont plus que ſuffiſantes pour nourrir les rivières & les ſources qui ſont à la ſurface de la terre.

666. Il n'eſt pas néceſſaire qu'une rivière ait de la pente pour que l'eau s'écoule; il ſuffit que ſa ſurface ſoit plus élevée que le niveau de la mer. Car une maſſe quelconque d'eau qui a la liberté de ſe répandre, s'abaiſſe juſqu'à ce qu'elle ſoit de niveau dans toute ſon étendue. Ce niveau fait partie d'une ſurface ſphérique ou ſphéroïdique à laquelle la direction de la peſanteur eſt par-tout perpendiculaire. Mais dans l'état phyſique & actuel des choſes, les lits des rivières ſont inclinés, du moins dans la plus grande partie de leur étendue. Leurs différentes inclinaiſons & leurs ſinuoſités dépendent de la réſiſtance du fond & des obſtacles que l'eau rencontre dans ſon chemin.

667. Soit *ADCX* (Fig. 50) un vaste réservoir d'où la rivière *XCEF* tire son eau. Les particules inférieures du réservoir étant pressées par les supérieures, il est clair qu'en faisant abstraction des obstacles, la vîtesse de la particule *C* sera le même que si cette particule étoit tombée de la hauteur *XC*, au lieu que la vîtesse de la particule *X* est infiniment petite. De même, les vîtesses des autres particules placées à des profondeurs inégales, sont inégales; chacune de ces vîtesses est dûe à la hauteur verticale qui lui répond. A mesure que l'eau chemine sur le plan incliné *CE*, la vîtesse s'accélère par la pesanteur; ensorte qu'ayant mené l'horisontale *HG*, la vîtesse en *P* est dûe à la hauteur *HP*, la vîtesse en *M* est dûe à la hauteur *HM*; &c. Fig. 50.

668. Il suit de-là que l'eau en s'éloignant du réservoir, doit diminuer de profondeur. Car puisque la rivière est dans un état permanent, & que par conséquent il passe à chaque instant la même quantité d'eau par deux sections quelconques *MP*, *VR*, il est évident que la vîtesse dans chaque point de *VR*, étant plus grande que la vîtesse dans chaque point correspondant de *MP*, la profondeur *VR* doit être nécessairement moindre que la profondeur *MP*. La largeur de la rivière est supposée constante.

669. Mais les profondeurs *MP*, *VR*, quoique toujours inégales entr'elles, approcheront d'autant plus de l'égalité, qu'on les prendra plus loin du réservoir, parce que dans cette supposition les vîtesses des particules diffèrent de moins en moins. En effet, si l'on

nomme reſpectivement M, V, P, R les vîteſſes des points M, V, P, R, on aura $M : P :: \sqrt{HM} : \sqrt{HP} :: \sqrt{HM} : \sqrt{[HM + MP]}$, & $V : R :: \sqrt{GV} : \sqrt{GR} :: \sqrt{GV} : \sqrt{[GV + VR]}$. Donc $\frac{M}{P} = \frac{\sqrt{HM}}{\sqrt{[HM + MP]}}$, & $\frac{V}{R} = \frac{\sqrt{GV}}{\sqrt{[GV + VR]}}$. Or, $\frac{\sqrt{GV}}{\sqrt{[GV + VR]}} > \frac{\sqrt{HM}}{\sqrt{[HM + MP]}}$, ou $\frac{GV}{GV + VR} > \frac{HM}{HM + MP}$, ou $GV \times HM + GV \times MP > GV \times HM + VR \times HM$, ou $GV \times MP > VR \times HM$, puiſque $MP > RV$ & $GV > HM$. Donc auſſi $\frac{V}{R} > \frac{M}{P}$. Donc la vîteſſe V differe moins de la vîteſſe R que la vîteſſe M ne differe de la vîteſſe P. Or ſi la vîteſſe étoit conſtante ſur chaque profondeur, chacune de ces mêmes profondeurs demeureroit conſtante. Donc puiſque les vîteſſes varient de moins en moins en s'éloignant de la ſource, les profondeurs doivent auſſi varier de moins en moins; ou ce qui revient au même, tendre de plus en plus à l'égalité.

670. On peut ſe faire par-là une idée générale du mouvement des rivières. Mais pluſieurs cauſes empêchent que les choſes ne ſoient en rigueur, telles que nous venons de les repréſenter. Ces cauſes ſont les inégalités du fond, les ſinuoſités du lit, l'élargiſſement ou le rétréciſſement de ce même lit, le frottement contre les bords; en un mot, les obſtacles de toute eſpèce que l'eau rencontre & qui troublent

ſon cours naturel. On conçoit que de-là doivent ré-ſulter différentes variétés dans la vîteſſe du courant. Souvent à une diſtance conſidérable de la ſource & dans des endroits beaucoup plus bas, la vîteſſe eſt moindre qu'à l'origine, tandis qu'abſtraction faite des obſtacles elle devroit toujours aller en augmentant. Il ſe fait ſans ceſſe de nouvelles combinaiſons entre le mouvement primitivement acquis, & celui qui eſt produit à chaque inſtant par la hauteur vive & actuelle de l'eau. Dans les endroits étroits & profonds, la vîteſſe primitivement acquiſe, devient nulle ou comme nulle en comparaiſon de celle qui eſt dûe à la hauteur vive de l'eau. Mais dans les endroits larges où l'eau a très-peu de profondeur, cette eau ne ſe meut preſqu'en vertu de la vîteſſe précédemment acquiſe. Quelle que ſoit la cauſe qui fait mouvoir le fluide, la réſiſtance des obſtacles dénature ſans ceſſe ſon mouvement. Le point de la plus grande vîteſſe eſt très-rarement vers le fond; il eſt quelquefois à la ſurface. Mais pour l'ordinaire il eſt environ vers le milieu de la profondeur. On ne peut pas lui attribuer de place fixe. Sa poſition dépend de la réſiſtance du fond combinée avec les forces actives qui produiſent l'écoulement.

671. D'après ces remarques, on comprend qu'il n'eſt pas poſſible de ſoumettre à un calcul exact & rigoureux le mouvement des rivières conſidéré dans toute ſa complication. Néanmoins il ne ſera pas inutile de faire voir comment on pourroit le déterminer, ſi l'on connoiſſoit la loi ſuivant laquelle chaque

particule eſt retardée par la réſiſtance des obſtacles.

Fig. 51. Soit $XCEF$ (Fig. 51) la coupe verticale & longitudinale d'une rivière qui tire ſon eau du réſervoir $AXCD$. On ſuppoſe que chaque particule éprouve une réſiſtance proportionnelle à une puiſſance donnée de ſa propre vîteſſe : il s'agit de trouver cette même vîteſſe.

Ayant prolongé l'horiſontale AX, ſoit menée, perpendiculairement à la direction du courant, la ligne KQ ; & conſidérons dans la partie TQ de cette ligne la partie infiniment petite Mm. Des points T, M, Q ſoient élevées les verticales TS, ML, QH. Suppoſons que ML repréſentant la preſſion que ſouffriroit le point M en vertu de la peſanteur de l'eau, ſous la même profondeur ML, la ligne OR repréſente la réſiſtance qu'éprouve le point T, placé à la ſurface de l'eau, en vertu du frottement contre le fond & contre les bords. Maintenant,

Soient
- KT . . . . $= a$
- TS . . . . $= b$
- KM . . . . $= x$
- & par conſéquent ML . . . . $= \frac{bx}{a}$
- OR . . . . $= c$
- la hauteur dûe à la vîteſſe du point T . . $= h$
- la hauteur dûe à la vîteſſe du point indéterminé M . . . . $= y$
- l'expoſant de la puiſſance de la vîteſſe, à laquelle la réſiſtance eſt proportionnelle . . . . $= n$.

En repréſentant les vîteſſes par les racines quarrées des hauteurs qui leur ſont dûes, & faiſant la proportion, $h^{\frac{n}{2}} : y^{\frac{n}{2}} :: c :$ un quatrième terme, ce quatrième terme $\frac{cy^{\frac{n}{2}}}{h^{\frac{n}{2}}}$ ſera, ſuivant les conditions du problême, l'expreſſion de la réſiſtance que ſouffre le point M, en vertu du frottement. Or s'il n'y avoit pas de frottement, le point M ſe mouvroit comme s'il étoit tombé de la hauteur ML, ou comme s'il étoit ſoumis à la preſſion $\frac{bx}{a}$. Retranchant de cette force la réſiſtance, le reſte $\frac{bx}{a} - \frac{cy^{\frac{n}{2}}}{h^{\frac{n}{2}}}$ ſera la force qui pouſſe actuellement le point M. Par conſéquent la force abſolue qui pouſſe l'eau au paſſage de l'orifice Mm eſt repréſentée par $Mm \times \left(\frac{bx}{a} - \frac{cy^{\frac{n}{2}}}{h^{\frac{n}{2}}}\right)$. Cette force eſt proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle produit. Or la petite maſſe d'eau qui paſſe à chaque inſtant par Mm eſt en raiſon compoſée de l'orifice Mm &

de la vîteſſe : la quantité de mouvement produit eſt donc exprimée par $Mm \times \sqrt{y} \times \sqrt{y}$ ou par $Mm \times y$.

Ainſi on aura l'équation $Mm\left(\frac{bx}{a} - \frac{cy^{\frac{n}{2}}}{h^{\frac{n}{2}}}\right) =$ $Mm \times y$; d'où l'on tire

$$h^n(bx - ay)^2 = a^2 c^2 y^n.$$

Pour faire uſage de cette équation, on meſurera, par le moyen de quelque corps flottant, la vîteſſe à la ſurface de l'eau, ce qui fera connoître h. On meſurera auſſi les lignes KT, KQ, TS, QH. La ligne OR ou c ſe déterminera, en obſervant que ſi l'on fait $x = a$, on a $y = h$; d'où il ſuit qu'alors l'équation précédente devient $(b - h)^2 = c^2$, ou $c = b - h$. On aura donc tout ce qu'il faut pour déterminer la hauteur y dûe à la vîteſſe d'un point donné M ſur la droite TQ.

Lorſque $n = 1$, l'équation qui donne y eſt du ſecond degré; ſi $n = 2$, l'équation eſt du premier; ſi $n = 3$, elle eſt du troiſième degré; &c.

672. Je ne m'arrête pas à diſcuter en détail les conſéquences particulières qui peuvent réſulter de ces équations; car il faut avouer qu'elles ne peuvent guères avoir d'autre but que d'offrir à l'eſprit des vérités théoriques. Quoique ces vérités ſoient intéreſſantes par elles-mêmes, néanmoins mon objet principal étant d'écrire un ouvrage uſuel, je me borne aux queſtions qui peuvent tourner au profit de la

pratique. Lorſqu'elles ne ſont pas ſuſceptibles de ſolutions rigoureuſes, je les traite phyſiquement, c'eſt-à-dire d'une manière un peu vague, mais ſuffiſante pour les beſoins qu'on en peut avoir.

673. La ſurface d'une rivière n'eſt pas toujours de niveau d'un bord à l'autre ; & le courant eſt quelquefois plus ou moins élevé vers le milieu que vers les bords, ſuivant les circonſtances. Le premier cas arrive, lorſqu'une rivière a un cours parfaitement libre, & qu'elle vient à augmenter conſidérablement, ſoit par la fonte des neiges, ſoit par l'affluence d'une autre rivière, ou de quelque torrent. Les eaux qui ſont vers les bords de la rivière étant plus retardées par le frottement que ne le ſont les eaux du milieu, celles-ci conſervent néceſſairement une plus grande partie de la vîteſſe initiale que les autres. Or en vertu des pertes réciproques de vîteſſe que font ces différentes eaux, elles ſe preſſent latéralement les unes les autres (556, 651) ; & comme la ſurface du fleuve eſt ſuppoſée dans un état permanent, les preſſions dont il s'agit doivent ſe faire équilibre. Donc là où eſt la moindre perte de vîteſſe, doit répondre la plus grande hauteur de niveau, afin que l'excès d'une hauteur ſur l'autre, produiſe une vîteſſe qui eſt encore détruite en partie, & qui occaſionne par-là une nouvelle preſſion, laquelle s'ajoute à la preſſion due à la hauteur commune de niveau, de manière que la ſomme de ces deux preſſions eſt égale à la preſſion de l'eau des bords. La rivière doit donc former une courbe convexe vers ſon milieu. La flèche

ou abſciſſe de cette courbe peut monter quelquefois à 2 ou 3 pieds.

674. Il peut arriver au contraire qu'une rivière ſoit plus élevée vers les bords que vers le milieu, lorſqu'elle rencontre quelqu'obſtacle dans ſon cours. Par exemple, ſi une rivière ſe jette dans une mer ſujette aux flux & reflux, il eſt clair que dans le temps du flux l'eau des bords de la rivière ayant moins de vîteſſe que celle du milieu, eſt refoulée plus facilement que cette dernière par l'eau de la mer; & que par conſéquent il remonte une plus grande quantité d'eau de la mer le long des bords de la rivière que vers ſon milieu. Or en vertu de cette augmentation d'eau vers les bords, la rivière peut être plus élevée en ces endroits que vers le milieu. Souvent il ſe forme dans la rivière deux courans très-diſtincts qui vont en ſens contraires; l'un placé vers le milieu qui ſe dirige vers la mer, l'autre ſitué vers les bords qui remonte le long de la rivière.

675. Il y a dans toutes les rivières de fréquens remous d'eau, c'eſt-à-dire, des mouvemens qui ſe font en ſens contraires. Ces remous ſont occaſionnés par les obſtacles que l'eau rencontre. Nous avons déja remarqué (583) que l'eau vers le fond pouvoit avoir un mouvement contraire à celui qu'elle a vers la ſurface. Les remous ne ſont pas toujours bien ſenſibles; mais ils produiſent du moins ce que les gens de rivière appellent *des mortes*, c'eſt-à-dire, des eaux qui ne coulent pas comme le reſte de la rivière, qui ſont ſujettes à des tournoyemens, & d'où les batteaux

ont

ont bien de la peine à ſortir quand ils y ſont engagés.

676. On obſerve conſtamment que s'il doit ſurvenir une crue d'eau à une rivière, l'eau vers le fond va plus vîte qu'à l'ordinaire. Les gens de rivière diſent alors que la rivière *mouve de fond*. La raiſon de cet effet eſt que le poids des eaux ſupérieures ſe fait ſentir de proche en proche ſur un long eſpace, & que la charge du fond venant ainſi à augmenter, la vîteſſe doit augmenter auſſi.

677. Lorſque le lit d'une rivière vient à ſe rétrécir, la profondeur augmente néceſſairement. De-là réſulte une plus grande charge d'eau ſur le fond, & par conſéquent une augmentation de vîteſſe de la ſurface au fond. Il eſt ſouvent néceſſaire de connoître, du moins à-peu-près, le changement qui arrive dans la profondeur d'une rivière, lorſqu'on fait quelque changement à l'étendue de ſon lit. Cette queſtion eſt ſurtout utile quand il s'agit de conſtruire un pont ſur une rivière. Je vais donc l'examiner dans ce cas particulier.

678. Pour la plus grande ſimplicité, ſuppoſons que le lit de la rivière ſoit un canal rectangulaire, & faiſons abſtraction de toute réſiſtance. Soit le rectangle $ACDB$ (Fig. 52) la coupe verticale du fleuve, Fig. 52.
faite ſuivant ſa largeur. Ayant élevé la verticale indéfinie KN, ſuppoſons que la vîteſſe à la ſurface AB ſoit dûe à la hauteur OM. Puiſqu'on fait abſtraction de toute réſiſtance, la vîteſſe d'un point quelconque R ou K ſera dûe à la hauteur correſpondante MR ou MK; & l'eau du fleuve s'écoulera, comme ſi

elle ſortoit par le pertuis $ACQB$ du réſervoir $aCDb$ entretenu conſtamment plein à la hauteur MK. Maintenant, ſuppoſons que le paſſage de l'eau ayant été rétréci par les arches du pont, la rivière ſoit cenſée s'écouler par le peruis rectangulaire $EFGH$ dont on connoît la baſe FG. Soit IN la hauteur dûe à la vîteſſe de l'eau à la ſurface EH. Le nouvel écoulement ſera le même que ſi l'eau ſortoit par le pertuis $EFGH$ d'un réſervoir $fCDg$ entretenu conſtamment plein à la hauteur NK.

Soient
- CD .... $= c$
- MK .... $= H$
- MO .... $= h$
- la quantité d'eau qui s'écoule pendant un certain temps t par le pertuis $ACDB$ .... $= Q$
- FG .... $= c'$
- NK .... $= H'$
- NI .... $= h'$
- la quantité d'eau qui s'écoule pendant le temps t par le pertuis $EFGH$ . . $= Q'$.

Nommons de plus θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a.

Cela poſé, on trouvera (250),

$$Q = \frac{4tc(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})\sqrt{a}}{3\theta}, \quad Q' = \frac{4tc'(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'})\sqrt{a}}{3\theta}.$$

Or $Q' = Q$. Ainſi on aura,

$c(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}) = c'(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'})$.

679. Dans cette équation, il y a deux inconnues, ſçavoir H' & h'. Suppoſons que la vîteſſe à la ſurface ſoit nulle dans les deux cas, ce qui eſt ſenſiblement vrai en pluſieurs occaſions : on aura $h = 0$, $h' = 0$, & notre équation deviendra $cH\sqrt{H} = c'H'\sqrt{H'}$. D'où l'on tire $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$, c'eſt-à-dire, que *la profondeur de la rivière avant l'exiſtence du pont, eſt à la profondeur qu'elle a en amont de ce pont ſuppoſé établi, comme la racine cube du quarré de la ſomme des largeurs des arches, eſt à la racine cube du quarré de la largeur de la rivière.*

680. Lorſque les hauteurs h & h' ne ſont pas nulles, elles doivent être proportionnelles, du moins ſenſiblement, aux hauteurs H & H', c'eſt-à-dire, qu'on a $h : h' :: H : H'$, & par conſéquent $h' = \frac{H'h}{H}$. Subſtituant cette valeur de h' dans l'équation générale $c(H\sqrt{H} - h\sqrt{h}) = c'(H'\sqrt{H'} - h'\sqrt{h'})$, & diviſant tout par $H\sqrt{H} - h\sqrt{h}$, on trouvera encore $cH\sqrt{H} = c'H'\sqrt{H'}$, & $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Donc à cauſe qu'on a $H : H' :: h : h'$, & par conſéquent $H - h : H' - h' :: H : H'$, on aura $H - h : H' - h' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Or $H - h$ & $H' - h'$ expriment les profondeurs de la rivière dans les deux cas. Ces profondeurs ſont donc encore ici dans le rapport qu'on a énoncé dans l'article précédent.

681. Si on ne vouloit pas admettre l'hypothèſe de l'article 678, que les vîteſſes des différens points

de l'eau ſont proportionnelles aux racines des hauteurs qui leur répondent; mais qu'en conſéquence du frottement on ſuppoſât que la hauteur dûe à la vîteſſe moyenne de l'eau lorſqu'elle paſſe par le pertuis $ACDB$ eſt la droite donnée OS, & que la hauteur dûe à la vîteſſe moyenne de l'eau lorſqu'elle paſſe par le pertuis $EFGH$ eſt la droite IT, le problême ne ſeroit pas plus difficile à réſoudre. Car en faiſant

$AC \ldots\ldots\ldots\ldots = b$

$CD \ldots\ldots\ldots\ldots = c$

$SO \ldots\ldots\ldots\ldots = H$

$EF \ldots\ldots\ldots\ldots = b'$

$FG \ldots\ldots\ldots\ldots = c'$

$IT \ldots\ldots\ldots\ldots = H'$,

il eſt clair que les quantités d'eau écoulées dans le même temps par les deux pertuis $ACDB$, $EFGH$, étant les mêmes, on auroit l'équation $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$; & comme la loi ſuivant laquelle les points S, T ſont placés ſur les hauteurs KO, KI, eſt cenſée donnée, on auroit une ſeconde équation. Ces deux équations ſerviroient à déterminer les deux inconnues H' & b'.

Par exemple, lorſque les points S, T ſont ſemblablement placés ſur les droites KO, KI, on a $H : H' :: b : b'$, & par conſéquent $b' = \frac{H'b}{H}$. Subſtituant cette valeur de b' dans l'équation $bc\sqrt{H} = b'c'\sqrt{H'}$, on trouvera $bcH\sqrt{H} = bc'H'\sqrt{H'}$, & $H : H' :: \sqrt[3]{c'^2} : \sqrt[3]{c^2}$. Donc auſſi $b : b' :: \sqrt[3]{c'^2}$:

$\sqrt[3]{c^2}$. Les profondeurs b & b' ſont donc encore ici entr'elles dans la raiſon déja énoncée.

Nous avons ſuppoſé dans tous ces calculs que le lit de la rivière étoit un canal rectangulaire ; ce qui n'a jamais lieu en rigueur. Mais il ſera toujours facile de modifier notre théorie ſuivant l'exigence des cas, & de l'adapter, du moins à-peu-près, aux problêmes de ce genre qui peuvent ſe préſenter dans la pratique.

SECTION II.

Conſidérations phyſiques ſur la manière dont les Rivières établiſſent leurs lits.

682. On conçoit que l'eau d'une rivière en frottant contre le fond & contre les bords, en détache néceſſairement de la terre qui eſt emportée par le courant. Ainſi la rivière doit s'approfondir & s'élargir. Cet approfondiſſement & cet élargiſſement auront lieu tant que la force de l'eau ne rencontrera pas de réſiſtance qui la détruiſe. Mais comme le lit en s'aggrandiſſant perd peu-à-peu ſa pente ; que la vîteſſe primitivement acquiſe diminue ſouvent par les coudes du lit ou par d'autres obſtacles ; qu'au contraire, les terres à une plus grande profondeur ont plus de tenacité : il arrive enfin que la force des eaux & la réſiſtance des terres ſe mettent ſenſiblement en équilibre. Si pour troubler cet équilibre, on met quelqu'obſtacle dans la rivière, la force de

l'eau luttera contre cet obſtacle, & tendra à rétablir le premier équilibre. Les fleuves doivent plutôt ceſſer de s'approfondir que de s'élargir ; car deux cauſes, la tenacité du fond & la diminution de la vîteſſe, concourent à rallentir ou à empêcher tout-à-fait l'approfondiſſement, tandis qu'au contraire la diminution de la pente & de la vîteſſe augmente la profondeur de l'eau, & par conſéquent auſſi la preſſion & le frottement qui en réſulte contre les bords, & qui tend à emporter les terres ou à les faire ébouler dans la rivière. C'eſt par cette raiſon que, toutes choſes d'ailleurs égales, les fleuves qui coulent dans des lits de matières homogènes & de peu de conſiſtance, ſont beaucoup plus larges que profonds.

683. Tous les fleuves ne ſe forment pas leurs lits de la même manière ; car il eſt certain, par exemple, qu'un même courant creuſe & emporte plus facilement un fond de ſable qu'un fond compoſé de craie ou de gravier. Mais ſuppoſons que la force de l'eau & la réſiſtance du terrein ſoient données, & voyons l'effet précis qui doit réſulter de la combinaiſon de ces deux forces. Qu'on ſe repréſente, pour cela, pluſieurs plans de même longueur, & différemment inclinés à l'horiſon. Suppoſons enſuite un corps grave qui les parcoure ſucceſſivement. On voit par le principe de la décompoſition des forces, que la peſanteur relative du corps en queſtion eſt d'autant plus grande que le plan ſur lequel il ſe meut approche plus d'être vertical. Si maintenant on imagine que les plans propoſés ſont hériſſés de pointes

qui réſiſtent au mouvement du corps, il eſt clair que pour imprimer à ce même corps une quantité *donnée* de mouvement, il faudra ajouter à la peſanteur relative une force étrangère d'autant plus grande que la peſanteur relative eſt plus petite, ou que le plan ſur lequel le corps eſt poſé, approche plus d'être horiſontal. Les obſtacles répandus ſur les plans réſiſtent donc, toutes choſes d'ailleurs égales, avec d'autant plus d'avantage, que les plans approchent plus d'être horiſontaux. Il en eſt de même de la réſiſtance du terrein qui forme le lit de la rivière. Plus le lit approche d'être horiſontal, plus il a de conſiſtance. La force du courant & la réſiſtance du terrein ne ceſſent de ſe combattre, & ne ſe mettent en équilibre, que quand la diminution de la pente rend la ſeconde force égale à la première.

684. Il ſuit de-là que la réſiſtance du terrein étant toujours donnée, plus le courant a de force, moins la rivière a de pente; car ſous une même inclinaiſon le terrein réſiſte plus à une petite force qu'à une grande. Ainſi la force de l'eau augmentant, la pente doit diminuer pour que l'équilibre s'établiſſe entre la force du courant & la réſiſtance du terrein. Comme la vîteſſe de l'eau proche le fond, eſt ordinairement plutôt dûe à la preſſion de l'eau ſupérieure qu'au mouvement précédemment acquis, plus un fleuve eſt profond, moins il a de pente. S'il contient par-tout la même quantité d'eau, le fond pourra être regardé comme rectiligne dans une étendue peu conſidérable; mais ſur un long eſpace ce fond forme réellement

une ſpirale dont les tangentes font par-tout des angles égaux avec les perpendiculaires correſpondantes tirées du centre de la terre qui eſt le centre de la ſpirale. Cette ſpirale approche d'autant plus du cercle, que les angles formés par les tangentes & les perpendiculaires approchent davantage de l'angle droit. Lorſque la quantité d'eau de la rivière augmente, ſoit par les pluies, ſoit par la fonte des neiges, ſoit par l'affluence de quelqu'autre rivière ou de quelque torrent, la force du courant augmente, & par conſéquent le fond tend de plus en plus à devenir horiſontal. De-là vient principalement que ſi pluſieurs fleuves ſe réuniſſent, le lit commun a moins de pente que n'en avoient les lits particuliers des mêmes fleuves avant leur union.

685. Nous avons vu (667) qu'abſtraction faite des obſtacles, la vîteſſe du courant s'accéléreroit ſans ceſſe en vertu de la peſanteur & de la pente. Suppoſons ici que cette accélération ſubſiſte, du moins en partie, ſur une étendue déterminée du lit, malgré la réſiſtance du terrein qui tend à la détruire. La quantité d'eau étant la même, mais la vîteſſe augmentant, la force du courant augmentera auſſi. Par conſéquent la pente ira toujours en diminuant. Elle ſera la moindre qu'il eſt poſſible, lorſque l'accélération de la vîteſſe ſera la plus grande qu'il eſt poſſible. Si l'on a donc deux fleuves qui s'accélèrent de la même manière par la pente, mais qui ſoient inégaux en maſſe, le plus conſidérable aura moins de pente que l'autre. Tant que l'accélération dure, le fond de

la rivière doit former une courbe concave, dont les tangentes font des angles de plus en plus grands, à mesure qu'on s'éloigne de l'origine de l'accélération, avec les perpendiculaires correspondantes tirées du centre de la terre. Mais l'accélération cessant, & la vîtesse étant réduite à l'uniformité, le fond devient sensiblement rectiligne, ou forme la spirale dont nous avons parlé dans l'article précédent.

686. Lorsqu'une rivière a par elle-même, & sans le secours d'aucune pente, la force de corroder le fond, ce fond sera nécessairement horisontal. Car si on supposoit qu'il eût quelque pente, cette pente augmenteroit la vîtesse, & par conséquent aussi la force du courant. Or dans son premier état le courant pouvoit, par hypothèse, corroder le fond. Donc sa force ayant augmenté, il n'en sera que plus capable de produire le même effet, & par conséquent de rendre le fond horisontal. On voit par-là que si la force de l'eau vient à augmenter, l'excavation augmentera, mais que la situation horisontale du fond ne sera point changée. Soit, par exemple, *AEBD* (Fig. 53) la coupe verticale & longitudinale de la rivière en un endroit proposé. Que *EB* en représente le fond qui est horisontal. Supposons qu'en de-là du point *B* la force du courant vienne à augmenter, soit par le rétrécissement du lit, qui augmente nécessairement la profondeur & la vîtesse, soit par de la nouvelle eau que la rivière reçoit, &c. Il est clair que l'eau ayant acquis une nouvelle force Fig. 53.

corrodera le fond & tendra à le rendre horiſontal. D'abord l'angle *HBC* ſera rongé, & le fond prendra la pente *HC*; enſuite la force du courant, favoriſée par la pente *HC*, tendra à faire prendre au fond la poſition *MCG* qui eſt horiſontale, ou du moins preſqu'horiſontale. Je dis *preſqu'horiſontale ;* car il faut remarquer que la maſſe d'eaux *AEBD* étant ſoutenue par la maſſe *DFGC*, lorſque le fond *EB* s'abaiſſe en *MC*, la ſurface *AD* de l'eau ne peut pas s'abaiſſer ſans que les eaux *DFGC* ne retombent un peu ſur les eaux *AEBD*, & que par conſéquent la vîteſſe du courant ne ſoit diminuée. Or cette diminution de vîteſſe pourra empêcher que le courant n'ait la force de rendre le fond tout-à-fait horiſontal. Il peut donc arriver qu'un fleuve qui a par lui-même la force de maintenir ſon fond horiſontal, venant à recevoir un autre fleuve, perde en partie cette force & demande de la pente ; mais cette pente n'eſt jamais produite par l'élévation du fond; elle provient d'une excavation réelle. Suppoſant que *EC* la repréſente : il eſt viſible que ſi elle coupe *BE* en *E*, le fleuve aura regagné en ce même point *E* ſa hauteur vive primitive & la force de rendre le fond horiſontal. La pente *EC* ira en diminuant, ſi le fleuve *AEBD*, dans le voiſinage du confluent, ſe reſſere par l'obſtacle que la rivière affluente lui oppoſe, parce qu'alors la hauteur de l'eau augmentant, le mouvement perdu à la rencontre de l'obſtacle, eſt plus que réparé par la preſſion de l'eau & par l'augmentation de la maſſe.

687. Soit *AD* (Fig. 54) une rivière qui ait Fig. 54.
ſimplement la force de maintenir ſon fond *CD* dans une ſituation horiſontale. Suppoſons enſuite que cette rivière arrivée en *D* s'élargiſſe ou ſe partage en pluſieurs branches, de manière qu'elle n'ait plus que *BE* de profondeur. Puiſque la force de l'eau, ſous la hauteur *AC*, eſt ſimplement ſuffiſante pour maintenir le fond horiſontal, il eſt clair que la force de l'eau, ſous la hauteur *BE*, ne ſera pas capable de produire le même effet. D'où il ſuit que ſi l'eau eſt mêlée de matières étrangères que le courant en *D* n'ait pas la force de ſoutenir ou d'entraîner, il ſe formera ſur *DG* l'attériſſement *DEFG* dont le deſſus *EF* eſt en pente. Comme la face *DE* ne peut pas ſe ſoutenir à plomb, l'angle *E* ſera emporté, & il s'établira autour du point *D* la contrepente *HL* qui ſe termine d'un côté, au fond horiſontal *CH*, & de l'autre, à la pente *EF*. On voit donc qu'il peut ſe former en *D* un attériſſement ſans que la force de l'eau *AH* diminue, & ſans que la partie *CH* du fond ceſſe d'être horiſontale.

On remarquera que la force de l'eau diminuant dans le temps que la contrepente *HL* ſe forme, la ſurface de l'eau devroit alors s'élever; mais comme en s'élevant elle retomberoit ſur *AB*, elle trouve plus de facilité à s'élargir & à corroder les bords. Ainſi l'eau ſans s'élever ſenſiblement, élargit le lit à meſure que la contrepente s'établit. Cet élargiſſement du lit a lieu dans toute la longueur qui répond à la contrepente *HL*; après quoi il ſe forme

en L la pente LF, & la hauteur de l'eau demeurant la même, la largeur eſt auſſi la même.

688. On a vû (684) que la réſiſtance du terrein étant donnée, plus le courant a de force, moins la rivière a de pente. Il eſt évident par le même principe que la force du courant étant donnée, plus le terrein qui compoſe le fond a de tenacité ou de réſiſtance, plus la rivière a de pente. De-là vient que les fleuves dont le fond eſt compoſé de craie ou de tuf, ont plus de pente que ceux dont le fond eſt de ſable ou de limon. Lorſque le fond d'une rivière eſt compoſé d'une matière (de roc, par exemple,) que l'eau ne puiſſe pas corroder, la pente demeure toujours la même, ou du moins ne diminue que très-peu par la ſuite des temps. C'eſt ainſi que les cataractes qui interrompent la continuation du lit d'un fleuve, ſe conſervent des ſiècles entiers ſans recevoir de changement bien ſenſible. Nous ſuppoſons que la pente du fond ne permet pas aux matières étrangères mêlées avec l'eau, de ſe dépoſer & de s'arrêter. Si le fond d'un fleuve n'eſt pas par-tout également réſiſtant, il changera de pente à proportion de la réſiſtance; il s'y formera des coudes, des gorges, &c.

689. Que le fond d'un fleuve ſoit compoſé de parties détachées les unes des autres, comme de pierres, de gravier, &c. La pente ſera d'autant moindre, que les parties dont il s'agit auront moins de peſanteur ſpécifique: car moins ces parties ſont peſantes, moins elles réſiſtent à l'eau, & par conſé-

quent plus la rivière a de force pour creuſer le fond & le rendre horiſontal. De plus la figure des mêmes parties peut préſenter plus ou moins d'obſtacle au choc de l'eau ; ce qui doit produire encore des variétés dans la pente. Les fleuves qui coulent entre des montagnes, ou dont le fond eſt de roc, doivent avoir & ont en effet plus de pente que les fleuves qui coulent dans les plaines, parce que le fond de ceux-ci eſt ordinairement composé de ſable. Comme la plûpart des fleuves, dans la partie ſupérieure de leur cours, ont leur lit rempli de groſſes pierres, & que ces pierres vont en diminuant de groſſeur à meſure qu'on s'éloigne de la ſource, on voit que dans les fleuves qui roulent ainſi ſur un fond pierreux, ce fond doit former une courbe concave qui, en s'éloignant de la ſource, fait des angles de plus en plus petits avec l'horiſontale. Il n'eſt pas moins évident que ſi un fleuve ſe meut, entre les montagnes, ſur un fond composé de pierrailles, & qu'enſuite dans la plaine le fond ſoit composé d'un ſable par-tout uniforme, le fond entier ſera formé de deux courbes, l'une concave, l'autre convexe, qui ſe raccordent, &c.

690. Nous avons déja eu l'occaſion d'obſerver que l'eau entraîne ordinairement avec elle des matières étrangères. En effet, il n'y a point de fleuve dont les eaux ſoient parfaitement pures, & qui ne charie quelques corps étrangers, comme de la pierre, du gravier, de la terre, des morceaux de racines, des tronçons de bois, &c. Parmi ces ma-

tières, les unes ont une pesanteur spécifique considérablement plus grande que celle de l'eau, & demeurent au fond; d'autres ont même pesanteur spécifique que l'eau, & se mêlent ou s'incorporent avec elle de manière que le tout peut être regardé comme ne formant qu'une seule & même masse: d'autres surnagent. Enfin il s'en trouve qui ayant un peu plus de pesanteur spécifique que l'eau sont néanmoins élevées & soutenues en vertu d'une certaine impulsion du courant, combinée avec la viscosité de l'eau; mais lorsque la force du courant vient à diminuer, elles retombent par leur pesanteur naturelle. On comprend que suivant les endroits où se déposent les matières dont nous parlons, il doit résulter des variations très-multipliées & très-sensibles dans la profondeur, la largeur & la direction du lit.

691. Soit un fleuve qui par sa propre force combinée avec la résistance du terrein s'établiroit le fond Fig. 55. *AB* (Fig. 55). Que ce fond soit couvert par le triangle *ABC* de même matière que lui. Il est évident que l'eau courant sur le fond *CB* aura la force de le creuser; mais comme l'excavation ne peut pas se faire en un instant, supposons que durant le temps que le fond emploie à parvenir de *CB* en *DB*, la rivière reçoive, par quelque cause, comme par exemple, par l'affluence d'un torrent, autant de matière qu'il en faut pour remettre le fond en *CB*. La même force du courant continuant d'agir, creusera de nouveau, & ramenera la pente en *DB*. Pendant cette opération, il arrivera de la nouvelle ma-

tière qui tendra à remettre la pente en *CB*; l'eau creuſera de nouveau, & ramenera la pente en *DB*. Ainſi de ſuite. Il eſt donc clair que l'excavation n'arrivera jamais en *AB*, mais ſeulement en *DB*. Le fond ſera toujours comme en mouvement entre les deux pentes *CB*, *DB*. On voit par-là que ſi un fleuve court ſur un fond qui réſiſte à l'excavation, & que cette excavation, pour être portée au point requis par la force du courant combinée avec la réſiſtance du terrein, demande un certain temps; qu'enſuite on ſuppoſe qu'avant qu'elle ne ſoit achevée le fleuve reçoive de la nouvelle matière; ce même fleuve ne ceſſera pas de creuſer ſon fond; & on pourra regarder le fond comme établi entre deux termes, dont l'un répond à la plus grande hauteur que la nouvelle matière peut occaſionner, l'autre à la plus grande profondeur où l'excavation eſt réellement portée.

Il eſt à propos de remarquer que l'accroiſſement du fleuve & l'abaiſſement du lit produiſent des variétés dans la force du courant, quoique cependant la quantité de matière entraînée, dans le temps de la crue des eaux, au moyen de la grande pente *CB*, ſoit égale à la quantité de matière entraînée, dans le temps des baſſes eaux, au moyen de la petite pente *DB*. Mais dans tout cela on peut prendre un terme moyen arithmétique dans lequel les excès compenſent les défauts, & ſuppoſer que les excavations ſont proportionnelles aux temps dans leſquels elles ont été faites.

692. Comme la quantité de matière amenée dans un fleuve par un torrent affluent augmente ou diminue selon que le torrent est plus ou moins plein, il suit évidemment de l'article précédent, que toutes choses d'ailleurs égales, plus l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux crues consécutives du torrent est considérable, moins le fleuve aura de pente. De même, les crues du torrent amenant d'autant plus de matière dans le fleuve, qu'elles sont plus considérables & qu'elles durent davantage, le fleuve aura d'autant moins de pente, que les crues seront moindres & qu'elles dureront moins. Mais d'un autre côté, un fleuve ayant d'autant plus de force pour creuser son lit, que sa crue d'eau est plus grande, & qu'elle dure davantage, il aura d'autant moins de pente que sa crue sera plus considérable, & qu'elle durera plus long-temps. Or comme la crue du fleuve dépend tant en durée qu'en grandeur, de la crue du torrent; & que la première fait une plus grande excavation, tandis que la seconde fait un plus grand remplissage, il faudra examiner comment ces deux causes se balancent mutuellement, pour pouvoir estimer l'effet & la mesure de celle qui l'emporte.

693. Lorsqu'un fleuve reçoit d'un torrent affluent une telle quantité de terre ou de sable, qu'elle ne puisse pas s'incorporer avec l'eau, cette matière étrangere se déposera sur le fond & l'exhaussera. Mais le cours du torrent venant à cesser, la matière déposée sera corrodée & emportée par le courant du fleuve. Si pour produire cet effet il faut plus de temps qu'il

qu'il ne s'en écoule entre deux affluences confécutives du torrent, le fond du fleuve ne pourra pas être réduit à la moindre pente que demandent la force de l'eau & la réfiftance du terrein; mais ce fond s'établira entre deux termes, dont l'un eft celui qui répond à la plus grande corrofion que peut faire l'eau de la rivière, l'autre eft celui qui répond à la plus grande élévation que peut produire la matière apportée par le torrent. Tout cela eft clair par les articles précédens.

694. Telles font les loix générales que les rivières fuivent dans leur pente. Examinons maintenant ce qui concerne la direction de leurs lits.

Tout mouvement eft effentiellement rectiligne; & un mobile ne fe détourne de cette direction que quand il y eft forcé par quelque caufe extérieure. Les rivières fe rendroient donc à leur terme fuivant une ligne droite, fi rien ne les en empêchoit; mais l'inégale réfiftance du terrein, les dépôts qui fe forment par les matières que l'eau charie, les obftacles naturels ou artificiels que l'eau rencontre, produifent dans le fond & fur les bords, des coudes, des gorges, des tortuofités de toute efpèce.

695. Soit *ACDEB* (Fig. 56) la coupe latitudinale d'un fleuve rectiligne. Suppofons que la matière du fond foit inégalement réfiftante, que la plus grande réfiftance foit dans la partie *DE*, & la moindre dans la partie *CD*. Concevons que le lit ait été d'abord établi en cet endroit, foit par l'excavation, foit par les dépôts des matières étrangeres chariées par l'eau. Fig. 56.

Maintenant, puisque la force du courant eſt la même en *CD* & en *DE*, & que la partie *DE* eſt plus réſiſtante que la partie *CD*, il eſt évident que ſi la force du courant ſuffit ſimplement pour empêcher que les nouvelles matières amenées par l'eau ne ſe dépoſent, & que la réſiſtance de la partie *DE* ſuffiſe ſimplement pour empêcher l'excavation, il eſt évident, dis-je, que la partie *DE* ne pourra pas être entamée, mais que la partie moins réſiſtante *CD* cédera & s'approfondira; elle aura beſoin d'une moindre pente pour empêcher la ſéparation du terrein. Suppoſons donc que l'eau creuſe juſqu'en *FD*: la hauteur de l'eau en cet endroit étant maintenant *FG*, ſa vîteſſe augmente & devient plus capable de creuſer. Dans le temps que ſe fait cette excavation, il faut néceſſairement que la hauteur de l'eau diminue en *HI* d'une quantité convenable à la partie *CDF* dont la ſection du fleuve eſt augmentée; autrement les parties de la maſſe d'eau ceſſeroient d'être contigues. Or par hypothèſe, la vîteſſe primitive en *I* ſuffiſoit ſimplement pour empêcher les dépôts des matières étrangères; donc cette vîteſſe après ſa diminution n'eſt plus capable du même effet. Le fond *DE* s'élève donc en *DK*; & la nouvelle ſection du fleuve eſt *ACFDMKB*. La plus grande vîteſſe de l'eau ſera vers la rive *AC*. Cette rive ſera donc néceſſairement corrodée, tandis qu'au contraire la rive *EB* s'éloignant de plus en plus du fil de l'eau recevra les dépôts des matières étrangères. Par conſéquent le fleuve perdra en cet endroit ſa direction rectiligne.

696. Si la ſection latitudinale d'un fleuve eſt établie tant en largeur qu'en profondeur, dans un terrein uniforme ; & qu'elle ait la figure d'un parallélogramme rectangle dont les bords ſoient verticaux : cette ſection ne ſera jamais altérée par le courant tant qu'il demeurera pur ; mais ſi le fleuve vient à recevoir des matières étrangères, par quelque cauſe (comme par l'affluence d'un torrent), les bords ſeront néceſſairement corrodés, & le fond s'inclinera des bords vers le milieu de la ſection. En effet, ſoit *BDFC* (Fig. 57) la ſection du fleuve propoſé. Tant Fig. 57.
que le corps de l'eau qui paſſe par cette ſection n'augmente point, elle ne doit pas changer, puiſque le fond & les bords ſont ſuppoſés établis. Mais comme la vîteſſe de l'eau eſt plus grande vers le fond que le long des rives ; lorſque le fleuve reçoit de la nouvelle matière, cette matière oppoſant par-tout la même réſiſtance au courant, la perte de force qu'elle y occaſionne eſt la même vers le fond & vers les bords. Par conſéquent, ſi l'on ſuppoſe qu'avec la vîteſſe primitive du point *E* le courant eût ſimplement la force d'empêcher les dépôts, il eſt clair que le courant vers les bords n'aura pas la même force. Il ſe formera donc des dépôts vers les bords, & la ſection deviendra plus petite. Or en vertu de cette diminution de la ſection, l'eau doit néceſſairement s'élever ; d'où il ſuit que la vîteſſe du point *E* augmente & qu'il ſe fait en conſéquence une excavation juſqu'en *K*. D'un autre côté, l'augmentation de profondeur de la ſection fait augmenter la vîteſſe dans

tous ſes points. Ainſi la force du courant, qui étoit tout-à-l'heure en équilibre avec la réſiſtance des bords, étant maintenant augmentée par l'augmentation de la vîteſſe, corrodera ces mêmes bords, & le lit s'élargira par en-haut. La ſection rectangulaire *B D F C* ſe changera donc en la ſection *R O K H G*.

En combinant les effets réſultans du dépôt des matières étrangères avec les effets réſultans de l'inégale réſiſtance du terrein qui forme le lit, on verra la raiſon de pluſieurs inégalités que l'on obſerve tant dans la direction que dans la profondeur des fleuves.

Fig. 58. 697. Soit un fleuve quelconque *AXDC* (Fig. 58) rectiligne ou tortueux qui rencontre le bout de digue ou *l'epi B E*, poſé obliquement ſur la rive *A X*. Si les différens filets d'eau qui frappent *B E* étoient des corps iſolés & parfaitement élaſtiques, ou ſi l'épi lui-même étoit un corps parfaitement élaſtique, les molécules d'eau ſe réfléchiroient en faiſant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Mais cette ſuppoſition n'eſt pas ici admiſſible en rigueur. Néanmoins comme il ne s'agit que de faire connoître en gros le mouvement réfléchi de l'eau, nous ſuppoſerons qu'en effet l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence. Soit donc *G H* un filet qui, après avoir frappé le point *H*, ſe réfléchit ſuivant *H L*, faiſant l'angle *E H L* égal à l'angle *G H B*. Que *H L* rencontre en *F* le filet voiſin *S F*. Le point *F* ſera pouſſé ſuivant les deux directions *F M*, *F L*, de ſorte

que ſi l'on repréſente par *FM* & par *FL* les vîteſſes ſuivant les mêmes directions, & qu'on acheve le parallélogramme *FMNL*, la vîteſſe du point *F* ſera exprimée par la diagonale *FN*. Cette diagonale rencontrant en *P* l'épi *BE*, le filet ſe réfléchira ſuivant *PO*, faiſant avec *PE* l'angle *OPE* égal à l'angle *FPB*. Que *PO* rencontre en *I* le filet *ZI*. En repréſentant par *IQ* & par *IO* reſpectivement les vîteſſes ſuivant les mêmes directions *ZIQ*, *IO*, & achevant le parallélogramme *IQRO*, la vîteſſe du point *I* ſera repréſentée par la diagonale *IR*. Comme *IR* rencontre l'épi en *V*, le point *I* ſe réfléchira ſuivant *VT*, faiſant l'angle *EVT* égal à l'angle *IVB*; & on pourra combiner, comme on vient de faire, la nouvelle vîteſſe avec la vîteſſe d'un nouveau filet. Ainſi de ſuite. Par-là on parviendra à connoître la direction que l'épi *BE* fait prendre au cours de l'eau. Il eſt clair que l'épi propoſé tend à pouſſer le courant vers la rive oppoſée *CD* ſuivant une direction plus ou moins oblique, & que ſon effet dépend de ſa poſition combinée avec la vîteſſe primitive de l'eau. De-là doivent réſulter des changemens proportionnés dans le lit du fleuve. Je ne m'arrête point à examiner tous ces changemens en détail, ni les moyens que les épis fourniſſent de modifier à volonté le cours d'une rivière, d'empêcher la ruine de ſes berges, de former des attériſſemens, de combler des affouillemens, &c. La matière a été traitée aſſez amplement dans la Piéce ſur les *Digues*, compoſée en commun par M. Viallet & par

moi, & qui remporta le prix de l'Académie de Toulouse en 1762. On me permettra d'y renvoyer le Lecteur.

SECTION III.

Du mouvement des Rivières à leur embouchure; de l'union & de la séparation des Rivières.

698. Lorsque la surface d'un fleuve est dans un état permanent, c'est-à-dire, ne monte ni ne baisse, il passe nécessairement en tems égaux des quantités égales d'eau par toutes les sections qu'on peut concevoir perpendiculaires à la direction du courant. De-là il suit que si le fleuve proposé demeure stable à son embouchure, il verse précisément autant d'eau qu'il en reçoit des parties supérieures; que si sa surface s'élève, il verse moins qu'il ne reçoit & que l'excès de la recette sur la dépense produit le gonflement; qu'enfin si sa surface s'abaisse, il verse plus qu'il ne reçoit & que l'excès de la dépense sur la recette produit l'abaissement de la surface.

699. Il peut se faire que l'eau d'un fleuve qui se décharge dans un réservoir quelconque d'eaux dormantes ou courantes, tombe d'une certaine hauteur dans le réservoir, comme il arrive dans les cataractes. Alors il n'est pas douteux que la décharge ne se fasse librement, & que même la résistance du fond & des bords cessant dans la chûte, l'eau n'ac-

quierre plus de vîteſſe & ne diminue de volume ; d'où il réſulte que de proche en proche l'eau ſupérieure doit auſſi s'accélérer, & que ſa ſurface doit s'incliner à l'horiſon. Mais comme les fleuves dont le fond eſt ſuſceptible de corroſion n'admettent pas une telle pente, ordinairement la ſurface du fleuve ſe réunit à celle du réſervoir, de manière que les deux ſurfaces peuvent être regardées comme deux plans qui ſe coupent à l'endroit de l'embouchure. L'interſection dont il s'agit ne ſe trouve pas toujours au même endroit dans les différens états d'accroiſſement ou de décroiſſement du fleuve ; mais dans ſes changemens, elle ne paſſe jamais certaines limites ; & on peut prendre, entre ſes excurſions, un terme moyen qu'on regardera comme la ſection conſtante des deux ſurfaces. La ſurface du fleuve eſt inclinée de l'*amont* à l'*aval*, comme on le comprend aſſez ; & la décharge ne peut manquer d'avoir lieu. Tout cela eſt applicable aux rivières qui ſe jettent dans des lacs ou dans d'autres rivières. Quant aux rivières qui ſe jettent dans une mer ſujette au flux & reflux, la choſe eſt un peu différente. Le flux refoule les eaux dans la rivière & les fait remonter à une certaine hauteur ; enſuite dans le temps du reflux, les eaux refoulées ou ſuſpendues, reprennent leur direction primitive. Le point d'interſection de la ſurface du fleuve avec celle de la mer eſt donc alors toujours en mouvement, & on ne peut pas lui attribuer une place fixe.

700. L'eau d'une rivière qui entre dans un autre

amas d'eaux éprouve une résistance qui rallentit sa vîtesse, & qu'il n'est pas aisé d'évaluer exactement. Fig. 59. Soient, par exemple, *ABCD*, *ECGF* (Fig. 59) deux rivières qui s'unissent en *CMN* & ne forment plus que la seule rivière *BHKG*. Imaginons, pour un moment, en *CN* une cloison qui sépare les deux masses d'eau. Il est évident que la pression résultante du poids des eaux contre cette cloison est la même de part & d'autre; & que par conséquent les deux masses d'eau en se rencontrant n'agissent l'une contre l'autre qu'en vertu de leurs vîtesses de translation. De cette percussion doit naître une vîtesse moyenne & composée, dont la direction divise l'angle *DCE* du confluent en deux parties égales ou inégales, selon que les deux rivières se rencontrent avec des forces égales ou inégales. Quelques Auteurs ont cherché sur ce sujet des déterminations précises; ils ont employé pour cela, les loix de la percussion des fluides, que nous exposerons dans le Chapitre suivant. Mais les mouvemens dont il s'agit, sont si composés par eux-mêmes, & tant de circonstances physiques & étrangères les altèrent, qu'on ne parviendra peut-être jamais à les représenter que d'une manière très-imparfaite par les formules de l'analyse.

701. La pente des rivières diminue à mesure qu'elles s'approchent de la mer (684). Ainsi aux environs de l'embouchure le courant devenu horizontal, ou sensiblement tel, s'écoule par tous les endroits qui lui en offrent la facilité; il s'étend en

ſuperficie, & diminue en profondeur. De-là réſulte, à la jonction de la rivière avec la mer, la formation d'un attériſſement, ou d'une eſpèce de *barre*, au-deſſus de laquelle l'eau a peu de hauteur. Lorſque la mer eſt ſujette au flux & reflux, dans le temps du flux l'eau de la mer qui entre dans le lit de la rivière, tend à tranſporter en amont la terre qui forme la barre; mais dans le temps du reflux, l'eau de la rivière reprend ſon cours naturel, ramène la terre, & tend à rétablir les choſes dans leur premier état. Au bout d'un certain temps ces deux courans contraires en ſe combattant ſans ceſſe, font prendre au fond de la rivière une forme permanente & propre à établir une eſpèce d'équilibre entre les effets réciproques qu'ils produiſent. Dans la Figure 60, Fig. 60. qui eſt un profil de la rivière & de la mer, pris ſuivant la longueur de la rivière, la courbe *DEF* repréſente le fond de la rivière *ABED*, & de la mer *CBEF*. Le point *E* eſt le ſommet de la barre. On peut conſidérer *BE* comme un pertuis par lequel paſſent tour-à-tour les deux courans dont nous venons de parler. Il prend la profondeur requiſe pour modifier leurs forces & pour établir entr'elles la proportion convenable. Il a pour élémens principaux de ſes dimenſions, la quantité d'eau de la rivière, ſa vîteſſe, & l'élévation de la haute mer.

702. On croit ordinairement que les barres ſont formées par les dépôts des matières que l'eau charie avec elle, & qui tombent au fond de la rivière à meſure que ſon lit s'approche de l'horiſontale, &

que par conſéquent la vîteſſe du courant diminue. Mais on voit par ce qui précéde, que quand même les eaux ſeroient parfaitement pures, il ſe formeroit toujours à l'embouchure une barre plus ou moins ſenſible. Car en vertu de la force que l'eau a pour corroder le fond, elle tend à le rendre, & le rend en effet à peu-près horiſontal dans le voiſinage de l'embouchure. La profondeur de l'eau doit donc, par cette ſeule raiſon, devenir alors fort petite. Enſuite l'action du flux & reflux (ſi la mer y eſt ſujette), la modifie, l'augmente ou la diminue, conformément aux loix de l'équilibre dont nous avons parlé dans l'article précédent. Les dépôts des matières chariées par l'eau peuvent produire quelques changemens dans la figure & dans les dimenſions de la barre; mais ils n'en ſont pas la cauſe primordiale. Elle peut ſouffrir auſſi des variétés par les ſables que les vents tranſportent, & qui en formant à l'embouchure des *dunes* ou des attériſſemens, ſont quelquefois changer de cours à l'eau.

703. Il y a au-deſſous de Bayonne une fameuſe barre à l'embouchure de la rivière d'Adour dans la mer. Pour la détruire ou la diminuer, on a changé pluſieurs fois le cours de l'Adour en cet endroit. Après avoir conſtruit en divers temps des épis qui n'avoient eu que des effets paſſagers, on ſe détermina en 1729, d'après le projet de M. de Touros, Directeur des Fortifications, à enfermer l'Adour, depuis un village nommé le *Boucau* juſqu'à la mer, entre deux longues digues de maçonnerie, qui furent dès-

lors commencées, qui ne ſont pas encore achevées, & qui doivent ſe prolonger à une certaine diſtance dans la mer. La paſſe des vaiſſeaux fut dirigée oueſt-nord-oueſt, ſuivant la délibération d'un Conſeil composé d'Officiers de la Marine & du Corps du Génie. Les ouvrages pour la conſtruction des digues ont été ſouvent interrompus & repris. Les travaux qu'on a faits juſqu'ici (1769), n'ont encore abouti qu'à procurer 6 à 7 pieds de hauteur à l'eau au-deſſus de la barre, en baſſe mer. Comme la mer monte de 11 à 12 pieds, la hauteur de l'eau eſt d'environ 18 pieds en haute mer. Si cette profondeur étoit bien franche, elle ſeroit ſuffiſante pour l'entrée d'aſſez grands vaiſſeaux; mais à cauſe de l'agitation des vagues, il faut en rabattre 3 ou 4 pieds; & de plus comme on ne doit pas attendre le moment précis de la haute mer pour entrer en rivière, il faut encore retrancher environ 2 pieds de la hauteur. Ainſi, pour l'ordinaire, on ne doit guères compter, en haute mer, qu'environ 12 pieds de profondeur d'eau pour l'entrée des vaiſſeaux, profondeur qui n'eſt pas ſuffiſante, & qu'on travaille à augmenter. Il eſt certain que le meilleur moyen d'y parvenir, eſt de reſſerrer l'Adour entre deux digues, dont la direction & la hauteur ayent d'ailleurs, autant qu'il eſt poſſible, l'avantage de faciliter l'entrée des vaiſſeaux & d'empêcher les enſablemens occaſionnés par les vents. En diminuant ainſi la largeur de l'Adour, & en prolongeant les digues un peu avant dans la mer, on augmente la vîteſſe de la rivière; elle combat

avec plus d'avantage le courant contraire de la mer; le fond prend la forme *D H e*, & le ſommet de la barre eſt porté en *e*, point auquel répond une profondeur *C e* plus grande que *B E*. Je dis que le ſommet de la barre eſt en *e*; car il faut remarquer qu'en la détruiſant dans un endroit on la fait renaître, au bout d'un certain temps, en un autre, & que jamais on ne parviendra à l'anéantir totalement. En effet, les mêmes cauſes qui produiſoient la barre, avant l'exiſtence des digues, doivent évidemment en produire une autre après leur conſtruction. Mais comme elle ſera portée plus avant dans la mer, elle pourra laiſſer au-deſſus d'elle la hauteur d'eau dont on a beſoin. Il conviendra de diminuer le plus qu'il eſt poſſible l'intervalle compris entre les digues, relativement au volume d'eau de la rivière, & ſans qu'il en réſulte aucune gêne pour la navigation; de ne leur pas faire faire des coudes, car ces coudes ſont très-nuiſibles au mouvement de l'eau, & ils occaſionnent pour l'ordinaire des attériſſemens ou des enſablemens dans leurs environs. Il faudroit de plus qu'en deſcendant vers la mer, la largeur du canal diminuât, afin que dans le temps du reflux le courant de la rivière reſſerré de plus en plus, augmentât de plus en plus de vîteſſe & de profondeur; & qu'au contraire dans le temps du flux la vîteſſe de la mer entre les digues diminuât de plus en plus par l'élargiſſement du canal. Je crois que par tous ces moyens on ſe procureroit une navigation commode & ſûre au-deſſus de la barre. Mais une

précaution eſſentielle dans la conſtruction des ouvrages, eſt de les mener de front, ou d'établir une eſpéce d'équilibre entre leurs parties correſpondantes. Faute d'obſerver cet équilibre, les ouvrages qu'on fait d'un côté de la rivière jettent l'eau vers le côté oppoſé, y occaſionnent des gorges & des attériſſemens. Ces dommages qu'il faut réparer, augmentent la dépenſe, & mettent dans l'achévement des digues une lenteur très-préjudiciable.

Les mêmes remarques s'appliquent, proportion gardée, à l'embouchure de deux rivières qui ſont ſujettes à croître & à décroître en des temps différens, comme cela eſt aſſez ordinaire. Il ſe forme à leur embouchure une eſpèce de flux & reflux qui produit à-peu-près les mêmes effets que celui de la mer.

704. Suppoſons une mer qui n'ait pas de flux & reflux, ou du moins faiſons abſtraction de ce mouvement alternatif de ſes eaux. On obſerve ordinairement que dans les temps des crues, les fleuves qui ſe jettent dans une telle mer, s'élèvent moins auprès de leur embouchure que dans les parties plus éloignées. Cela doit en effet arriver ainſi. Car l'eau d'un fleuve à ſon embouchure ne s'élève qu'autant que la ſurface du réſervoir de décharge s'élève en même temps, puiſque la ſection commune de la ſurface du fleuve avec la ſurface du réſervoir, regardée comme immobile, eſt toujours à-peu-près au même endroit (699). Or, comme la ſurface de la mer ne s'élève qu'inſenſiblement par l'eau qu'elle reçoit du fleuve

affluent, il eſt viſible que dans les crues la ſurface du fleuve doit former avec le prolongement de la ſurface de la mer un plus grand angle que dans les baſſes eaux. Car de pluſieurs lignes inclinées qui ſe terminent au même point ou à-peu-près au même point, celle qui raſe la ſurface d'un plus grand volume d'eau doit s'incliner ou ſe coucher le moins ſur l'horiſontale. La crue du fleuve doit donc ſe faire plus ſentir dans les parties éloignées de l'embouchure que dans le voiſinage de l'embouchure. La choſe a également lieu pour les fleuves qui ont beaucoup de pente, & pour ceux qui en ont peu; mais elle eſt vraie principalement pour les derniers.

705. De-là ſuit l'explication d'un phénomène aſſez remarquable. Voici en quoi il conſiſte. Une petite rivière ſe jette dans une autre qui conſerve toujours la même quantité d'eau, ou le même niveau, & qui regorge conſidérablement dans le lit de la première; enſorte que l'eau eſt comme ſtagnante dans la petite rivière ſur une longue étendue depuis l'embouchure. Tout-à-coup cette même rivière reçoit une crue conſidérable; & néanmoins la ſurface de l'eau, dans le voiſinage de l'embouchure, n'eſt guères plus élevée qu'avant la crue. Cet effet eſt tout naturel, comme on voit par l'article précédent. L'eau s'élève dans les parties ſupérieures de la petite rivière. Cette eau donne une impulſion à celle qui eſt dans le voiſinage de l'embouchure & accélère ſa vîteſſe. Lorſqu'on voit donc un fleuve croître d'une certaine quan-

tité auprès de ſon embouchure, on peut conclure qu'il a cru d'une quantité ſenſiblement plus grande dans les parties ſupérieures.

706. Soit maintenant un fleuve qui ait toujours la même quantité d'eau, & qui aille ſe jetter dans la mer, ou dans un autre fleuve que j'appelle *fleuve principal*. Que la mer par ſon flux, ou le fleuve principal par une crue d'eau, regorge dans le lit du fleuve affluent. Alors la vîteſſe de ce même fleuve affluent eſt retardée, & l'eau doit s'y élever plus haut dans le voiſinage de l'embouchure que dans les parties plus éloignées. En effet, ſoient *BR* (Fig. 61) la ſurface de la mer, ou du fleuve principal, & *BF* l'embouchure du fleuve affluent *IBFO*. Maintenant, ſuppoſons que la ſurface *BR* s'élève en *AT*. Il eſt clair qu'alors l'eau de la mer ou du fleuve principal oppoſe quelque réſiſtance au mouvement du fleuve affluent, & que par conſéquent la ſurface primitive *EB* du fleuve affluent doit s'élever au point *D* où elle rencontre la ſurface *TAM* de la mer ou du fleuve principal, & prendre en conſéquence la poſition *EK*. Or, comme la réaction de la mer ou du fleuve principal n'a qu'une certaine étendue, & que ſi par le point *M* où l'horiſontale *TAM* rencontre le fond du fleuve affluent, on mène la ſection *EM* perpendiculaire au courant du fleuve affluent, le point *E*, tout au moins, eſt à l'abri de cette réaction, il eſt viſible que la ſurface *EK* eſt plus élevée dans la ſection *KDG* que dans toute autre ſection faite entre les points *E* & *K*, & à plus

Fig. 61.

forte raiſon dans toute ſection faite en-delà du point *E*.

707. On voit par la même démonſtration & la même figure, qu'à meſure que la ſurface *AT* s'élève, le point *K* s'élève auſſi, & qu'en même temps il monte vers la ſource du fleuve affluent. Le point *K* ne doit pas être regardé dans tous les cas comme l'interſection de deux lignes. Il s'y forme un gonflement qui eſt plus ou moins ſenſible, ſelon la proportion entre la force du fleuve affluent & la force de la mer ou du fleuve principal. Quelquefois la ſurface de la mer eſt plus élevée, au point *K*, de pluſieurs pieds, que la ſurface du fleuve affluent, & le point *K* a un mouvement très-conſidérable en ſens contraire du fleuve affluent. Tel eſt le remous qui ſe fait ſur la Seine dans le temps du flux, & qu'on obſerve encore à pluſieurs lieues au-deſſus de Rouen. L'eau de la mer remonte avec rapidité & gliſſe ſur celle de la Seine, à-peu-près comme elle feroit ſur un terrein uni, dans une étendue de pluſieurs lieues au-deſſus de l'embouchure. On obſerve la même choſe, proportion gardée, à l'embouchure de deux rivières qui ſe jettent l'une dans l'autre; quand l'une de ces rivières croît ſans que l'autre croiſſe en même temps ou en même proportion.

708. Lorſque deux fleuves s'uniſſent & n'en forment plus qu'un ſeul, la largeur du lit de ce fleuve *compoſé* eſt toujours moindre que la ſomme des largeurs des deux fleuves *ſimples* avant l'union ; car il eſt évident que la ſurface contre laquelle l'eau frotte

dans

dans le fleuve composé est nécessairement moindre que la somme des surfaces contre lesquelles l'eau frotte dans les deux fleuves simples. Ainsi le fil de l'eau du fleuve composé est plus rapide que celui des fleuves simples. En supposant donc que la vîtesse vers les bords soit la même dans les deux cas, il est évident que les matières étrangères chariées par l'eau, doivent, dans le fleuve composé, se déposer sur les bords. D'où il suit que le lit se rétrécit & s'approfondit proportionnellement. De cet approfondissement résulte une plus grande hauteur d'eau qui augmente à son tour la vîtesse. Tout cela est constant par l'expérience. On voit des rivières, sur-tout lorsqu'elles ont peu de pente, en recevoir d'autres, sans paroître augmenter bien sensiblement de volume; mais la vîtesse devient plus grande.

709. Deux rivières qui s'unissent, peuvent avoir & ont ordinairement des quantités d'eau, des pentes, des vîtesses, très-différentes. Pareillement, lorsqu'une rivière se partage en plusieurs branches, il est clair que ces branches pouvant être regardées comme des rivières particulières, elles auront, selon les circonstances, des quantités d'eau, des pentes, des vîtesses, différentes. Il n'est donc pas surprenant que quand une rivière se fourche à la pointe d'une isle, ses bras en s'éloignant, ne conservent pas toujours le même niveau. Chaque niveau particulier peut baisser ou hausser par rapport aux autres, selon que l'eau, par sa quantité & par la pente, trouve plus ou moins de facilité à s'écouler.

710. En 1760, il parut un petit Traité ſur le cours des Fleuves, dans lequel l'Auteur prétend qu'un *grand fleuve peut abſorber toutes les eaux d'un autre fleuve auſſi conſidérable que lui, ſans que cette accrue faſſe hauſſer en rien les eaux du premier fleuve, dont la largeur du lit reſte la même qu'auparavant. La choſe a lieu,* pourſuit-il, *parce que l'accrue ayant doublé la quantité d'eau du fleuve, elle lui a doublé auſſi la vîteſſe de ſon écoulement. Ainſi elle n'a pu s'y élever, & l'élargiſſement de ſon lit étoit inutile.* On voit par-là que ſelon cet Auteur, en augmentant la quantité d'eau, on augmente la vîteſſe en même raiſon, du moins ſenſiblement, & que la rivière ne doit pas hauſſer. De-là il conclut qu'il eſt indifférent, quant à la hauteur des eaux, d'en augmenter ou d'en diminuer le volume; & il combat vivement l'uſage ordinaire où l'on eſt de *ſaigner* une rivière ſujette à ſe déborder, ou de dériver une partie de ſes eaux par des canaux, dans la vûe de la faire baiſſer, & de prévenir les inondations qu'elle peut occaſionner dans les campagnes voiſines.

711. Ce ſyſtême qui a ſéduit quelques perſonnes, a beſoin d'être éclairci, & d'être réduit à des bornes aſſez étroites. L'hypothèſe ſur laquelle il eſt appuyé, que *les vîteſſes croiſſent comme les quantités d'eau*, n'eſt point du tout exacte (648). Il eſt bien vrai qu'en augmentant la quantité d'eau on augmente la vîteſſe, mais non pas en même raiſon à beaucoup près. Dans les fleuves qui ont peu de pente, & dont le niveau eſt le même, du moins à-peu-près, que celui

de la mer, comme cela arrive ordinairement au voisinage de l'embouchure dans la mer, on ne fera pas baisser, au moins sensiblement, le niveau de l'eau en partageant le fleuve en plusieurs branches. Soit, par exemple, le fleuve *AB* (*Fig.* 62) dont le niveau est le même que celui de la mer *GHEF.* Il est clair qu'en faisant de nouvelles ouvertures *CF*, *DE*, les eaux ne baisseront pas pour cela dans la partie *ACD*, ou que du moins elles n'y baisseront que dans le rapport de la somme des surfaces *CF*, D*E*, à la somme des surfaces *AB*, *GHEF*; ce qui est une quantité insensible. Concluons de-là que les saignées faites à un fleuve près de son embouchure dans la mer, ou en général à toute rivière qui a peu de pente, doivent avoir ordinairement de legers avantages. Mais si une rivière a une pente & une vîtesse sensibles, il n'est pas douteux que l'augmentation de la quantité d'eau ne fasse hausser sensiblement le niveau de la rivière, & que réciproquement on ne fasse baisser le niveau de l'eau en diminuant son volume par des saignées. Fig. 62.

712. Quelquefois on a besoin de dériver une certaine quantité d'eau d'une rivière, pour faire mouvoir une usine ; & on veut connoître de combien on fera baisser le niveau de cette rivière qu'on suppose assez peu volumineuse pour qu'on n'y doive prendre l'eau qu'avec économie, si on ne veut pas lui enlever la qualité d'être navigable. Voici d'abord la solution de ce problême dans l'hypothèse où la rivière & le canal de dérivation sont rectangulaires,

Fig. 63 & 64. 713. Soient $ABCD$ (Fig. 63) le plan ou la ſection horiſontale d'un canal rectangulaire, qui repréſente la rivière propoſée, $EFHG$ le plan du canal auſſi rectangulaire qui doit ſervir à dériver une partie de la rivière. Je ſuppoſe, pour me borner au cas qui a lieu ordinairement, qu'à la ſurface la vîteſſe du courant ſoit comme inſenſible. De plus je fais abſtraction des obſtacles, & je ſuppoſe en conſéquence que ſur toute la profondeur la vîteſſe de chaque point ſoit dûe à la hauteur qui lui répond. Soit le rectangle $MOPN$ (Fig. 64) la ſection verticale & latitudinale de la rivière, OP repréſentant le niveau de l'eau avant l'exiſtence du canal de dérivation. Suppoſons enſuite qu'après l'établiſſement de ce canal le niveau s'abaiſſe en VX, & que le rectangle $SQRT$ repréſente la ſection verticale & latitudinale du même canal. Il eſt évident que ſuivant les conditions du problême, la ſomme des quantités d'eau qui paſſent, pendant un temps donné t, par les deux orifices $VOPX$, $SQRT$, doit être égale à la quantité d'eau qui paſſoit, pendant le même temps t, par l'orifice $MOPN$.

$$\text{Soient}\begin{cases} MO \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = H \\ OP \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = c \\ SQ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = H' \\ QR \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = c'; \end{cases}$$

& nommons, comme à l'ordinaire, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur donnée a.

La quantité d'eau qui paſſe par le pertuis $VOPX$ ſera (250), $= \frac{4tcH'\sqrt{aH'}}{3\theta}$; celle qui paſſe par le pertuis $SQRT$, $= \frac{4tc'H'\sqrt{aH'}}{3\theta}$; celle qui paſſoit par le pertuis $MOPN$, $= \frac{4tcH\sqrt{aH}}{3\theta}$. Donc, par la condition énoncée, on aura, en négligeant le facteur commun $\frac{4t\sqrt{a}}{3\theta}$,

$$cH'\sqrt{H'} + c'H'\sqrt{H'} = cH\sqrt{H}.$$

La quantité d'eau qui doit être dérivée de la rivière pendant le temps t, étant ſuppoſée *donnée*; ſi l'on nomme q cette quantité, on aura $q = \frac{4tc'H'\sqrt{aH'}}{3\theta}$. Combinant cette équation avec la précédente, on trouvera les deux inconnues H' & c' par les équations

$$H' = \sqrt[3]{\left[\frac{(4tcH\sqrt{aH} - 3\theta q)^2}{16t^2c^2a}\right]},$$

$$c' = \frac{3\theta cq}{4tcH\sqrt{aH} - 3\theta q}.$$

Ainſi on connoîtra la profondeur & la largeur du canal de dérivation. On connoîtra auſſi la quantité $H - H'$ dont le niveau de la rivière a baiſſé.

714. Le problême ſeroit également facile à réſoudre, ſi l'on ne ſuppoſoit pas que la vîteſſe de chaque filet d'eau eſt produite par la hauteur qui lui répond, & qu'on fixât la hauteur moyenne du cou-

rant, comme on a fait dans l'article 681. Je laiſſe ce calcul à faire au Lecteur.

715. Comme les rivières n'ont preſque jamais la forme rectangulaire, la théorie précédente n'eſt applicable à la pratique qu'au moyen de quelques opérations préliminaires qu'il eſt bon d'indiquer ici.
Fig. 65. Soit en général *MFGHIKN* (Fig. 65) la ſection verticale & latitudinale de la rivière. On y prendra des ſondes à des intervalles égaux, c'eſt-à-dire, qu'ayant diviſé la largeur *MN* en parties égales *MA*, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EN*, on meſurera les profondeurs correſpondantes *AF*, *BG*, *CH*, *DI*, *EK*. Les diviſions de la largeur doivent être aſſez multipliées pour qu'on puiſſe regarder ſenſiblement les arcs *MF*, *FG*, *GH*, &c, comme des lignes droites; & par conſéquent la ſection de la rivière, comme un polygone rectiligne. Alors ſuivant les premiers principes de la Géométrie, l'aire de ce polygone ſera $= (AF + BG + CH + DI + EK) \times MA$, c'eſt-à-dire le produit de la ſomme des profondeurs par l'un des intervalles égaux de la largeur. Diviſant ce produit par la largeur entière *MN*, ſuppoſant que la verticale *MO* repréſente le quotient, & achevant le rectangle *MOPN*; l'aire de ce rectangle ſera la même que celle du polygone. Cela poſé, on pourra dans la pratique, ſans craindre beaucoup d'erreur, conſidérer le rectangle *MOPN* comme la ſection de la rivière. Ainſi en ſuppoſant que par la dérivation le niveau de ce rectangle s'abaiſſe en *VX*, la ſection réelle de la rivière, après la dérivation, ſera

le polygone *mFGHIKn*; & la quantité dont le niveau aura baissé, sera *MV*, sensiblement. On opérera d'une manière analogue pour le canal de dérivation, s'il ne doit pas avoir la forme rectangulaire.

La même méthode est applicable au problême des articles 678, 679, 680, 681.

CHAPITRE IX.

De la percussion des Fluides.

716. LORSQU'UN fluide en mouvement rencontre un corps, ou un obstacle placé sur sa route, il pousse nécessairement ce corps, cet obstacle, avec une certaine force, puisque les particules fluides sont elles-mêmes des petits corps, qui multipliés par leur vîtesse, composent une quantité déterminée de mouvement. Si au lieu de supposer le fluide en mouvement, on le suppose en repos, mais qu'un corps vienne le choquer avec une certaine vîtesse, la *résistance* que le fluide opposera au corps proposé, sera égale à la *percussion* que le fluide mû avec la vîtesse du corps exerceroit contre ce même corps supposé en repos. Cela est évident par soi-même. La percussion & la résistance des fluides suivent donc les mêmes loix & se mesurent de la même manière.

717. On connoît la diſtinction qu'il faut mettre entre les forces mortes & les forces vives. Les premières ſont de ſimples preſſions qui ne produiſent pas de vîteſſe actuelle & finie, & qui n'en produiroient qu'après avoir agi pendant un temps fini : les autres qu'on appelle ordinairement forces de percuſſion, produiſent une vîteſſe finie & actuelle, & peuvent être regardées comme des ſommes de preſſions accumulées. Il eſt évident que toute force de preſſion peut être contrebalancée ou meſurée par un poids; car un poids n'eſt autre choſe qu'une maſſe ſoumiſe à l'action de la peſanteur qui eſt elle-même une force de preſſion. Quant aux forces de percuſſion, ſi l'on ſuppoſe qu'elles produiſent leur effet dans un inſtant indiviſible, elles ſeront infinies par rapport aux forces de preſſion, & ne pourront par conſéquent être meſurées par aucun poids. Mais on ne conçoit pas comment la force d'un corps en mouvement, qui eſt une quantité finie, peut, dans un inſtant indiviſible, produire un effet fini, c'eſt-à-dire, imprimer une quantité déterminée de mouvement à un autre corps. Toute communication de mouvement ſe fait dans un temps fini, quoiqu'il puiſſe être d'une briéveté qui nous échappe. Nous pouvons donc regarder en général les forces de percuſſion comme agiſſant par degrés, à la manière des forces de preſſion, & comme produiſant leur effet dans un temps fini extrêmement court. Alors elles ſont meſurables par des poids; car la peſanteur appliquée, pendant un temps fini, à un corps, produit une force

vive, capable par conſéquent de faire équilibre à une autre force vive. On voit par-là que lorſqu'un fluide frappe un corps, le choc qu'il exerce ainſi eſt toujours réductible à un certain poids.

718. Il eſt très-difficile de déterminer les loix de la percuſſion des fluides, d'une manière exacte & applicable à la pratique. On n'a pas encore pu trouver à ce ſujet une théorie parfaitement ſatisfaiſante. Dans celle qu'on ſuit ordinairement, & qui a l'avantage d'être fort ſimple, on ſuppoſe que le fluide eſt compoſé à chaque inſtant, dans la direction de ſon mouvement, d'une infinité de filets parallèles qui donnent chacun leur coup, ſans ſe gêner les uns les autres; ce qui ne peut pas avoir lieu en rigueur, & ce qui mène en certains cas à des réſultats trop éloignés de la vérité pour être admiſſibles. Néanmoins deux motifs m'engagent à expoſer ici cette théorie, malgré ſes imperfections; l'un eſt de faciliter à mes Lecteurs l'intelligence de pluſieurs ouvrages ſur l'Architecture navale, auxquels elle ſert de fondement; l'autre eſt qu'elle peut être employée, ſans craindre beaucoup d'erreur, dans le calcul des machines mues, à l'aide de roues, par des courans d'eau ou d'air; objet important que j'ai ici principalement en vûe. Je rapporterai enſuite des expériences qui feront voir en quels cas elle peut être admiſe ou doit être abſolument rejettée.

SECTION I.

Théorie ordinaire de la percussion des Fluides.

Fig. 66. 719. *Si un même fluide* MXZN (Fig. 66) *dont toutes les particules se meuvent avec la même vîtesse, frappe perpendiculairement les deux plans* AB, AR, *les forces des chocs sont entr'elles comme ces plans.*

Car toutes les molécules fluides étant supposées se mouvoir suivant les directions *IK*, *OR*, &c, perpendiculaires aux deux plans proposés, l'impulsion contre le plan *AB*, est à l'impulsion contre le plan *AR*, comme le produit du nombre des molécules qui frappent *AB*, par leur vîtesse, est au produit du nombre des molécules qui frappent *AR*, par leur vîtesse. Or les masses qui frappent dans des temps égaux les plans *AB*, *AR* sont des prismes qui ont pour bases ces plans, & pour hauteur commune la vîtesse du fluide. Donc le rapport de l'impulsion contre le plan *AB*, à l'impulsion contre le plan *AR*, est évidemment le même que le rapport du plan *AB* au plan *AR*.

720. *Si deux fluides de même espèce* MXZN,
Fig. 66 & 67. EGHF, (Fig. 66 & 67) *mus avec différentes vîtesses, frappent perpendiculairement les deux plans* AB, CD *en repos, les forces des chocs seront entr'elles comme les produits des plans par les quarrés des vîtesses des fluides.*

Car en suppoſant {
l'impulſion contre AB . . . . $= F$
l'impulſion contre CD . . . . $= f$
la maſſe fluide qui choque AB . . $= M$
ſa vîteſſe qui eſt celle du fluide
$MXZN$ . . . . $= V$
la maſſe fluide qui choque CD . . $= m$
ſa vîteſſe qui eſt celle du fluide
$EGHF$ . . . . $= u$,

on aura $F : f :: MV : mu$. Or puiſque les fluides ſont de même eſpèce, les maſſes M & m ſont entr'elles comme leurs volumes (10), & leurs volumes ſont entr'eux comme les produits des plans AB, CD qui leur ſervent de baſe, multipliés par les vîteſſes des fluides qui en repréſentent les hauteurs. Ainſi on aura $M : m :: AB \times V : CD \times u$; & $MV : mu :: AB \times V^2 : CD \times u^2$. Donc auſſi, $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$.

721. On doit remarquer que ſi les fluides n'étoient pas de la même eſpèce, la raiſon des denſités devroit entrer dans la raiſon des maſſes qui frappent en même temps les plans AB, CD. Alors *les chocs ſeroient en raiſon composée des plans, des denſités des fluides, & des quarrés des vîteſſes des mêmes fluides.* Il ne faut pas perdre cette remarque de vûe, lorſqu'il s'agit de comparer le choc d'un fluide à celui d'un autre fluide de denſité différente ; par exemple, le choc de l'eau au choc de l'air. Mais ici & dans les articles ſuivans, je ſuppoſe, pour abréger le diſ-

cours, que les fluides ſont de la même eſpèce ou qu'ils ont la même denſité.

722. On remarquera auſſi que toutes les molécules d'un même fluide ſont toujours ſuppoſées ſe mouvoir avec la même vîteſſe. Si elles avoient des vîteſſes différentes, il faudroit prendre la vîteſſe *moyenne*, & regarder cette vîteſſe comme celle du fluide. Ainſi dans la proportion $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$ de l'article 720, les lettres V & u repréſenteroient les vîteſſes moyennes des deux fluides propoſés.

723. Si les plans AB, CD, au lieu d'être en repos au moment qu'ils reçoivent les impulſions des fluides, comme nous l'avons ſuppoſé, ſe meuvent uniformément & parallélement ~~perpendiculairement~~ aux directions des fluides, il eſt tout auſſi facile de trouver le rapport des impulſions contre ces deux plans. Car ſuppoſons que dans un temps donné, le plan AB, par ſa vîteſſe primitive & uniforme, parvint en ab, & que le plan CD, par ſa vîteſſe primitive & uniforme, parvint en cd; en ſorte que KT, PQ repréſentent ces deux vîteſſes primitives. Soient VT & LQ les vîteſſes contemporaines des deux fluides. Il eſt clair que les impulſions des fluides contre les plans AB, CD, ſeront les mêmes que ſi ces plans étoient en repos, & que les fluides, au lieu de ſe mouvoir avec les vîteſſes VT, LQ, ſe mouvoient ſimplement avec les vîteſſes VK, LP, puiſque les plans ſe ſouſtrayent au choc avec les vîteſſes KT, PQ. Donc en nommant F & f les impulſions, V la

vîteſſe VT, v la vîteſſe KT, u la vîteſſe LQ, u' la vîteſſe PQ : on aura $F ; f : : AB \times (V - v)^2 : CD \times (u - u')^2$.

On voit de même que ſi les plans, au lieu de fuir directement les fluides, venoient à leur rencontre avec les vîteſſes v & u', on auroit $F : f : : AB \times (V + v)^2 : CD \times (u + u')^2$. Ainſi en réuniſſant les deux cas, on aura $F : f : : AB \times (V \mp v)^2 : CD \times (u \mp u')^2$.

724. Il peut arriver que l'un des plans, par exemple, le plan AB ſoit en repos ; alors $v = 0$, & la proportion devient $F : f : : AB \times V^2 : CD \times (u \mp u')^2$. D'où l'on tire $f = F \times \frac{CD \times (u \mp u')^2}{AB \times V^2}$, formule qui ſervira à comparer l'impulſion perpendiculaire contre un plan qui ſe meut, à l'impulſion perpendiculaire contre un plan en repos.

725. *Si le fluide* MXZN (Fig. 66) *frappe perpendiculairement le plan* AB *en repos, & que le fluide* EGHF (Fig. 68) *frappe obliquement le plan* CD *auſſi en repos ; l'impulſion contre le plan* AB, *ſera à l'impulſion qui réſulte perpendiculairement contre le plan* CD, *comme le produit du plan* AB *par le quarré de la vîteſſe du fluide* MXZN, *& par le quarré du ſinus total, eſt au produit du plan* CD *par le quarré de la vîteſſe du fluide* EGHF, *& par le quarré du ſinus de l'angle* RCD *d'incidence du fluide* EGHF *ſur le plan* CD. Fig. 66. & 68.

Car ſi l'on ſuppoſe

l'impulſion contre AB	$=$	F
l'impulſion qui réſulte perpendiculairement contre CD	$=$	f
la vîteſſe du fluide $MXZN$	$=$	V
la vîteſſe du fluide $EGHF$	$=$	u
la maſſe qui choque AB	$=$	M
la maſſe qui choque CD	$=$	m
ſa vîteſſe perpendiculaire à CD . .	$=$	u'
le ſinus total	$=$	R
le ſinus de l'angle d'incidence RCD	$=$	p,

on aura d'abord $F : f :: MV : mu'$. Or en menant DR perpendiculaire à CR ou à la direction du fluide, il eſt évident que le nombre des molécules qui frappent DC eſt le même que le nombre des molécules qui frappent DR. Ainſi les priſmes fluides qui frappent en temps égaux les plans AB, CD, ſont entr'eux comme leurs baſes AB, DR, multipliées par les vîteſſes des fluides qui en ſont les hauteurs. On a donc $M : m :: AB \times V : DR \times u$; ou bien (en obſervant que $DR = CD \times \frac{p}{R}$), $M : m :: AB \times V : CD \times \frac{p}{R} \times u :: AB \times V \times R : CD \times u \times p$. De plus, ſi ſur la direction d'un filet quelconque xn du fluide $EGHF$, on prend la partie ny pour repréſenter la vîteſſe de ce fluide, & qu'on faſſe le parallélogramme rectangle $ntyr$

dont le côté $n\,t$ eſt perpendiculaire, & le côté $n\,r$ parallèle à DC, il eſt évident que des deux vîteſſes $n\,t$, $n\,r$ dans leſquelles la vîteſſe $n\,y$ ſe décompoſe, il n'y a que la première qui contribue au choc, & qu'il ne faut pas avoir égard à la ſeconde. Comparant la vîteſſe $n\,t$ ou u' à la vîteſſe u du fluide $EGHF$, on aura $u' : u :: ry : ny :: p : R$, & par conſéquent $u' = u \times \frac{p}{R}$. On aura donc $MV : mu' :: AB \times V^2 \times R : \frac{CD \times u^2 \times p^2}{R} :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$. Donc enfin, $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$.

Cette proportion ſervira à comparer la percuſſion oblique à la percuſſion perpendiculaire, les deux plans choqués étant en repos à l'inſtant des chocs.

726. Lorſque les vîteſſes V & u ſont égales, on a ſimplement $F : f :: AB \times R^2 : CD \times p^2$, proportion qui ſervira à comparer l'impulſion perpendiculaire d'un fluide contre un plan, à l'impulſion du même fluide ou d'un fluide pareil contre un autre plan frappé obliquement.

727. De-là ſuit auſſi la manière de comparer entr'elles les percuſſions obliques, les plans choqués étant toujours en repos; car ſi, en gardant les autres dénominations de l'article 725, on appelle A la ſurface du plan AB, B celle du plan CD; qu'enſuite on ſuppoſe un troiſième plan C qui ſoit choqué obliquement par un troiſième fluide avec la vîteſſe v, & qu'on appelle φ la force qui réſulte per-

pendiculairement contre ce même plan, q le ſinus de l'angle ſous lequel il eſt frappé : on aura ces deux proportions,

$$F : f :: A \times V^2 \times R^2 : B \times u^2 \times p^2,$$

$$\phi : F :: C \times v^2 \times q^2 : A \times V^2 \times R^2,$$

leſquelles étant multipliées par ordre, donnent $\phi : f :: C \times v^2 \times q^2 : B \times u^2 \times p^2$. D'où l'on voit que *les forces* ϕ *&* f *ſont entr'elles en raiſon compoſée des plans, des quarrés des vîteſſes, & des quarrés des ſinus des angles d'incidence.*

Fig. 66 & 69.

728. Suppoſons maintenant que le plan AB (Fig. 66) étant toujours en repos au moment qu'il eſt frappé perpendiculairement par le fluide $MXZN$, le plan CD (Fig. 69) ſe meuve parallèlement à lui-même ſuivant une direction quelconque Cc ou Dd, au moment qu'il eſt frappé obliquement par le fluide $EGHF$. Je prends ſur la direction de ce fluide la droite LQ pour repréſenter ſa vîteſſe, & je la décompoſe en deux autres vîteſſes LI, LK, dont la première eſt la même que celle Cc ou Dd du plan CD. Il eſt clair que la ſeconde vîteſſe LK eſt la ſeule en vertu de laquelle le fluide agiſſe ſur le plan CD, & que le choc eſt le même que ſi le plan CD étant en repos, le fluide venoit le frapper ſuivant la direction RLK, avec la vîteſſe LK. Donc ſi l'on nomme v cette vîteſſe, m le ſinus de l'angle RLD ou KLC, f la force qui réſulte perpendiculairement contre le plan CD; & qu'on nomme de plus, comme dans l'article 720, F l'impulſion perpendiculaire contre le plan AB, V la vîteſſe du fluide

$MXZN$,

$MXZN$, R le ſinus total : on aura, $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times v^2 \times m^2$.

729. Il eſt facile de trouver l'expreſſion de la vîteſſe v, & du ſinus m, par le moyen de la vîteſſe LQ, de la vîteſſe Cc, du ſinus de l'angle CLQ que fait la direction véritable du fluide avec le plan CD, & du ſinus de l'angle QLI que fait la direction du fluide avec celle du mouvement primitif du plan CD. Car du point K, ſoit abaiſſée la perpendiculaire KT ſur LQ, & ſuppoſons la vîteſſe $LQ = u$, la vîteſſe LI ou $KQ = u'$, le ſinus de l'angle KQT ou $QLI = n$, ſon coſinus $= p$, le ſinus de l'angle $QLC = q$, ſon coſinus $= r$. On aura $KT = \frac{nu'}{R}$, $QT = \frac{pu'}{R}$, $LT = u - \frac{pu'}{R}$. De plus l'angle KLC étant la différence des deux angles QLC, QLK, on aura, par les règles de la Trigonométrie, $m = q \times \frac{LT}{LK} - r \times \frac{KT}{LK} = \frac{q}{v}\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{r}{v} \times \frac{nu'}{R}$. Donc $m^2 v^2 = \left(q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right)^2$. Subſtituant cette valeur de $m^2 v^2$ dans la proportion de l'article précédent, on aura $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times \left(q\left(u - \frac{pu'}{R}\right) - \frac{rnu'}{R}\right)^2$.

On connoîtra donc le rapport de la percuſſion perpendiculaire contre un plan immobile à la per-

cuſſion oblique contre un plan qui ſe meut parallèlement à lui-même.

730. Ayant ainſi appris à comparer enſemble les différentes eſpèces de percuſſions des fluides, il ne s'agit plus que de connoître la meſure abſolue de l'une d'entr'elles, pour en conclure celle de toutes les autres. Or la percuſſion perpendiculaire contre un plan immobile, étant la plus ſimple de toutes, il eſt naturel de la prendre ici pour unité fondamentale. Elle eſt donnée par la table ſuivante que j'emprunte de M. Bouguer (*Manœuvre des Vaiſſeaux, pag.* 185).

Impulſions de l'eau ſur une ſurface plane d'un pied quarré, frappée perpendiculairement.

Vîteſſe en 1 ſeconde.	Impulſions.		Vîteſſe en 1 ſeconde.	Impulſions.	
pieds.	liv.	onc.	pieds.	liv.	onc.
1	1	3	7	59	0
2	4	13	8	75	0
3	10	12	9	97	0
4	19	3	10	120	0
5	30	0	11	145	0
6	43	0	12	172	0

Impulſions de l'eau ſur une ſurface plane d'un pied quarré, frappée perpendiculairement.

Viteſſe en 1 ſeconde.	Impulſions.		Vîteſſe en 1 ſeconde.	Impulſions.	
pieds.	liv.	onc.	pieds.	liv.	onc.
13	203	0	19	434	0
14	235	0	20	480	0
15	270	0	21	529	0
16	300	0	22	580	0
17	334	0	23	635	0
18	389	0	24	688	0

Il eſt clair qu'au moyen de cette table & de la théorie précédente, on pourra déterminer l'impulſion de l'eau contre une ſurface plane *donnée*, immobile ou mobile, lorſqu'on connoîtra la vîteſſe de l'eau, & celle de la ſurface dans le cas où cette ſurface ſeroit mobile. Quant aux impulſions des autres fluides, on les trouvera auſſi, lorſqu'on connoîtra le rapport des denſités de ces fluides à celle de l'eau. Par exemple, ſi l'on ſuppoſe que la denſité de l'air ſoit $\frac{1}{850}$ de celle de l'eau, en diviſant chacune des impulſions de la table précédente par 850, on aura les impulſions correſpondantes du vent.

Pour montrer l'usage de la théorie, j'en vais faire quelques applications générales.

EXEMPLE I.

Fig. 70. 731. *Soit un triangle isocele* ACB (Fig. 70) *en repos & exposé au choc d'un fluide dont la direction est perpendiculaire à sa base* AB : *on demande le rapport de l'impulsion que recevra ce triangle parallèlement à sa hauteur* CD, *à l'impulsion directe & perpendiculaire que recevroit sa base* AB?

En nommant F l'impulsion directe contre AD ou DB, f l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre AC ou CB, on aura (726), $F : f :: AD \times (\text{sin. tot.})^2 : AC \times (\text{sin. } ACD)^2 :: AD \times \overline{AC}^2 : AC \times \overline{AD}^2 :: AC : AD$. Donc $f = \frac{F \times AD}{AC}$. Considérons maintenant que les impulsions sur AC & sur CB se détruisent en partie; car si l'on prend deux filets correspondans OR, or, & que représentant les impulsions perpendiculaires aux points R & r par les droites RF, rf égales & perpendiculaires aux côtés AC, CB du triangle, on fasse les parallélogrammes rectangles $ERHF$, $erhf$ dont les côtés RH, rh soient parallèles à AB, & les côtés RE, re parallèles à CD; il est clair que des quatre forces RH, RE, rh, re dans lesquelles les forces RF, rf se décomposent, les deux RH, rh se détruiront mutuellement, & qu'il ne restera que les deux forces RE, re pour pousser le triangle parallèlement à

CD. De plus, si l'on nomme φ la force *RE* ou *re*, on aura $f : \varphi :: RF : RE : AC : AD$; & par conséquent $\varphi = \frac{f \times AD}{AC}$. Mettant pour f sa valeur $\frac{F \times AD}{AC}$, on aura $\varphi = \frac{F \times \overline{AD}^2}{\overline{AC}^2}$. Donc $\varphi : F :: \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2$; & $2\varphi : 2F :: \overline{AD}^2 : \overline{AC}^2$, proportion qui nous apprend que *l'impulsion reçue par le triangle parallèlement à sa hauteur, est à l'impulsion directe que recevroit sa base, comme le quarré de la demi-base, est au quarré de l'un des côtés.* Connoissant donc la seconde de ces forces, on connoîtra aussi la première.

732. Donc, lorsque le triangle isocèle *ACB* est rectangle, l'impulsion qu'il reçoit parallèlement à sa hauteur n'est que la moitié de l'impulsion directe que recevroit sa base. Car alors le triangle rectangle *ADC* est isocèle, & on a $\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: 1 : 2$.

733. Il suit encore de-là que si l'on a un quarré *ACBM* (Fig. 71) qui soit frappé d'abord dans la direction de sa diagonale *CM*, ensuite perpendiculairement à l'un de ses côtés *AC*, la première impulsion sera à la seconde, comme 1 est à $\sqrt{2}$, ou comme 7 est à 10 environ. Car dans le premier cas il n'y a que le triangle *ACB* qui reçoive le choc, l'autre moitié *AMB* du quarré n'en est point affectée; & dans le second il n'y a que le côté *AC* de choqué. Donc, en nommant *M* la première im- Fig. 71.

pulſion, A la ſeconde, & de plus B l'impulſion perpendiculaire que recevroit AB, on aura ces deux proportions,

$$M : B :: 1 : 2, \ (732)$$

$$B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1, (719),$$

leſquelles étant multipliées par ordre donnent ; $M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$.

EXEMPLE II.

Fig. 72. 734. *La demi-circonférence* AQB (Fig. 72) *étant choquée par un fluide dont la direction eſt perpendiculaire au diamètre* AB *ou parallèle au raïon* QC : *on demande le rapport de l'impulſion que recevra cette demi-circonférence parallèlement à* QC, *à l'impulſion directe & perpendiculaire que recevroit le diamètre* AB?

Ayant diviſé la demi-circonférence AQB en une infinité d'élémens Ff, Ll, &c, par les droites FL, fl parallèles au diamètre AB; & ayant mené les ordonnées FS, fs, LT, lt, &c; ſi l'on nomme F le choc direct que recevroit FR ou Ss, ϕ le choc que reçoit Ff parallèlement à QC, on aura (731), $\phi = \frac{F \times \overline{FR}^2}{\overline{Ff}^2}$. Soit mené le raïon CF. Les triangles ſemblables FRf, FSC donneront $FR : Ff :: FS : CF$, & par conſéquent $\frac{\overline{FR}^2}{\overline{Ff}^2} = \frac{\overline{FS}^2}{\overline{CF}^2}$. Donc $\phi = \frac{F \times \overline{FS}^2}{\overline{CF}^2}$. Ainſi pour avoir l'impulſion totale que reçoit la demi-circon-

férence parallèlement à QC, il ne s'agit plus que de trouver la somme de toutes les quantités $\frac{F \times \overline{FS}^2}{\overline{CF}^2}$ ou $\frac{Ss \times \overline{FS}^2}{\overline{CF}^2}$, en représentant l'impulsion directe contre FR ou Ss par cette ligne elle-même. Or, si l'on fait tourner le demi-cercle ABQ autour du diamètre AB, il produira une sphère qui aura pour élément $\frac{n}{1} \times \overline{FS}^2 \times Ss$, $\frac{n}{1}$ étant le rapport de la circonférence au diamètre. Par conséquent l'impulsion totale demandée est au solide de la sphère, dans le rapport constant de $\frac{1}{\overline{CF}^2}$ à $\frac{n}{1}$. Mais le solide de la sphère $= n \times \overline{CF}^2 \times \frac{2}{3} AB$. Donc l'impulsion cherchée $= \frac{2}{3} AB$; c'est-à-dire que l'impulsion directe contre AB étant représentée par cette même ligne AB, l'impulsion que reçoit la demi-circonférence, parallèlement à QC, est représentée par les deux tiers de AB. Ces deux impulsions sont donc entr'elles dans le rapport de 3 à 2; & l'une étant connue, l'autre le sera aussi.

735. On voit par-là que l'impulsion reçue par un cylindreque vertical placé au milieu d'une rivière, est les deux tiers de celle que recevroit le parallèlepipede rectangle, circonscrit au même cylindre, & exposé par l'une de ses faces au choc perpendiculaire du fluide. Car le demi-cylindre antérieur & la face cor-

reſpondante du parallèlepipede circonſcrit, ſont les ſeules parties qui reçoivent le choc du fluide ; elles en garantiſſent les autres parties.

EXEMPLE III.

736. *Suppoſons maintenant que* AQB *repréſente une demi-ſphère produite par la révolution du quart de cercle* AQC *autour du raïon* QC, *& expoſée au choc d'un fluide qui la frappe parallèlement à* QC ; *on demande le rapport de l'impulſion qui tendra à la faire marcher ſuivant le même ſens* QC, *à l'impulſion perpendiculaire que recevroit le grand cercle produit par la révolution du raïon* CA ?

Il eſt viſible par l'article 734, que l'impulſion reçue parallèlement à QC, par la zone ſphérique que décrit l'arc Ff, eſt à l'impulſion perpendiculaire que recevroit la zone circulaire correſpondante, décrite par l'élément Ss, comme $\frac{Ss \times \overline{FS}^2}{\overline{CF}^2}$ eſt à Ss, ou comme $\overline{FS}^2$ eſt à $\overline{CF}^2$. Or, ſi l'on mène la droite ab égale & parallèle à AB ; que l'on conſtruiſe une parabole aCb, qui ait ſon ſommet en C, & aQ ou bQ pour dernière ordonnée ; qu'on prolonge SF juſqu'en P, & qu'on mène EH perpendiculaire à CQ : la propriété de la parabole donnera $\overline{EH}^2 = CH \times CQ$, ou $\overline{CS}^2 = SE \times SP$, ou $\overline{CF}^2 - \overline{FS}^2 = (SP - EP) \times SP$, ou $\overline{FS}^2 = EP \times SP$.

Donc $\overline{FS}^2$ eſt à $\overline{CF}^2$, comme $EP \times SP$ eſt à $\overline{CF}^2$ ou $\overline{SP}^2$, c'eſt-à-dire, comme EP eſt à SP. Donc l'impulſion reçue parallèlement à QC, par la ſomme des zones ſphériques, ou par la demi-ſphère, eſt à l'impulſion perpendiculaire que recevroit la ſomme des zones circulaires, ou l'aire du cercle produit par la révolution de AC, comme le ſolide produit par la révolution de toutes les lignes EP autour de CQ, eſt au ſolide produit par la révolution de toutes les lignes PS autour de QC; c'eſt-à-dire, comme le paraboloïde produit par la révolution de la demi-parabole CQa autour de l'axe CQ, eſt au cylindre produit par la révolution du rectangle $CQaA$ autour du même axe. Or, le paraboloïde n'eſt que la moitié du cylindre ; car en conſidérant le paraboloïde comme compoſé d'une infinité de cercles décrits par les ordonnées EH, on verra que l'axe CQ étant ſuppoſé diviſé en une infinité de parties égales, ces cercles qui ſont entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes, compoſent une progreſſion arithmétique dont le nombre des termes eſt exprimé par la hauteur CQ, le premier terme eſt zero, & le dernier eſt le cercle décrit par aQ ou AC. D'où il ſuit que le paraboloïde eſt égal au produit de ce cercle par la moitié de la hauteur CQ, tandis que le cylindre eſt égal au produit du même cercle par la hauteur entière CQ. Donc enfin *l'impulſion reçue, parallèlement à QC, par la demi-ſphère*

AQB, *n'eſt que la moitié de celle que recevroit perpendiculairement le grand cercle qui lui ſert de baſe.*

737. Il eſt clair que l'autre hémiſphère ne reçoit aucun choc de la part du fluide, & que par conſéquent il eſt indifférent d'expoſer au choc du fluide, ou une ſphère entière, ou ſeulement une demi-ſphère, pourvu que dans ce dernier cas le fluide qui vient frapper la ſurface convexe de l'hémiſphere ait une direction perpendiculaire au grand cercle qui lui ſert de baſe.

Nous avons fait uſage de cette propoſition dans les notes ſur le Chapitre II de l'Hydrodaſtique, tome 1, pag. 145.

EXEMPLE IV.

738. *Le fluide* EGHF (Fig. 73) *allant frapper obliquement le plan* CD *qui, par quelque cauſe ex-*
Fig. 73. *térieure, eſt néceſſité à ſe mouvoir parallèlement à lui-même ſuivant la direction donnée* Cc: *on demande l'angle ſous lequel le choc doit ſe faire, pour que le fluide imprime la plus grande quantité de mouvement qu'il eſt poſſible au plan* CD *dans le même ſens* Cc?

Soit priſe la droite LQ pour repréſenter la vîteſſe du fluide, & ſoit décompoſée cette vîteſſe en deux autres, dont la première LI eſt la même que celle du plan CD, & ne produit par conſéquent aucun effet ſur lui, la ſeconde eſt LK, la ſeule qui contribue à mouvoir le plan. En vertu de la même vî-

teſſe LK il réſultera perpendiculairement à CD (728) une impulſion proportionnelle à $CD \times \overline{LK}^2 \times (\text{ſin.}\ MLK)^2$. Repréſentons cette force par LA perpendiculaire à CD, & décompoſons-la en deux autres forces, l'une LH parallèle à la direction donnée Cc, l'autre LZ perpendiculaire à la même direction. Il eſt clair que le plan n'ayant la liberté de ſe mouvoir que dans le ſens Cc, la force LH eſt la ſeule à laquelle il faille avoir égard. De plus on voit qu'on aura, force LH = force $LA \times \frac{\text{ſin.}\ LAH}{\text{ſin.}\ tot.}$, ou bien, en prolongeant HL indéfiniment vers N, obſervant que l'angle HAL = l'angle MLN, & mettant pour force LA ſa valeur, force $LH = CD \times \overline{LK}^2 \times (\text{ſin.} MLK)^2 \times \frac{\text{ſin.}\ MLN}{\text{ſin.}\ tot.}$.

Cette force, ſuivant les conditions du problême, doit être la plus grande qu'il eſt poſſible, ou un *maximum*, comme s'expriment les Géomètres. Soit priſe ſur LM la partie arbitraire LM pour ſinus total, & du point M ſoient abaiſſées les perpendiculaires MB, MN ſur les droites LK, LN. Il eſt évident que MB ſera le ſinus de l'angle MLK, & MN le ſinus de l'angle MLN. La force LH pourra donc être repréſentée par $\frac{CD \times \overline{LK}^2 \times \overline{MB}^2 \times MN}{LM}$. Dans cette expreſſion, les quantités CD, LK, LM ſont données & toujours conſtantes, quel que puiſſe être l'angle formé par le plan CD & par la direction OL

du fluide. Car la longueur du plan CD eſt donnée immédiatement ; la vîteſſe LQ du fluide, la direction & la quantité de la vîteſſe initiale Cc du plan CD, ſont données, ce qui fait connoître la poſition & la grandeur de LK ; enfin on a pris LM à volonté. Donc, à cauſe de la poſition fixe & connue des droites LK, LN, il n'y a dans l'expreſſion du *maximum* que les droites MB & MN qui puiſſent être variables ; & on voit que la queſtion propoſée ſe réduit à partager un angle donné KLN en deux autres KLM, MLN par la droite LM, de manière que menant d'un point M, pris à volonté ſur cette ligne, les perpendiculaires MB, MN à LK & à LN, le produit $\overline{MB}^2 \times MN$, ſoit un *maximum* parmi tous ſes ſemblables.

Fig. 74 739. Pour réſoudre ce problême, je décris dans l'angle donné BLN (Fig. 74), avec le raïon LM, l'arc KMX ; & j'obſerve qu'une quantité ne devenant un *maximum* que parce qu'elle augmente juſqu'à ce point, puis diminue, il y a néceſſairement en deçà & en de-là du point M de *maximum* deux points infiniment voiſins m & f qui ſont tels que menant les perpendiculaires mb, mn, fg, fh aux droites LB, LN, les produits $\overline{mb}^2 \times mn$ & $\overline{fg}^2 \times fh$ ſont égaux entr'eux, ou qu'on a $\overline{mb}^2 \times mn = \overline{fg}^2 \times fh$. Or, ſi des points m & f on abaiſſe les perpendiculaires mu, fy ſur les droites fg, mn, on aura $fg = mb + fu$, & $fh = mn - my$.

L'équation précédente eſt donc la même choſe que $\overline{mb}^2 \times mn = (mb + fu)^2 \times (mn - my)$, ou $2mb \times fu \times mn + \overline{fu}^2 \times mn - \overline{mb}^2 \times my - 2mb \times fu \times my - \overline{fu}^2 \times my = 0$; & comme les lignes fu, my ſont infiniment petites par rapport à mb & à mn, il eſt clair que les termes $\overline{fu}^2 \times mn$, $-2mb \times fu \times my$, $-\overline{fu}^2 \times my$ ſont infiniment petits par rapport aux autres, & doivent par conſéquent être négligés. Ainſi notre équation devient $2mb \times fu \times mn - \overline{mb}^2 \times my = 0$, ou $2fu \times mn = mb \times my$. D'où l'on tire $fu : my :: mb : 2mn$. Soit mené le raïon Lm. On aura, à cauſe des deux triangles ſemblables fum, Lbm, & des deux triangles ſemblables myf, Lnm, les deux proportions,

$$fu : fm :: Lb : Lm$$

$$fm : my :: Lm : Ln,$$

leſquelles étant multipliées par ordre donnent, $fu : my :: Lb : Ln$. Donc on aura $mb : 2mn :: Lb : Ln$, ou bien, en mettant à la place des lignes mb, mn, Lb, Ln les lignes MB, MN, LB, LN qui en différent infiniment peu ; $MB : 2MN :: LB : LN$, ou $MB : LB :: 2MN : LN$. La propriété qui caractériſe le point M eſt donc telle que *le ſinus de l'angle* MLB *eſt à ſon coſinus, comme le double du ſinus de l'autre angle MLN eſt à ſon coſinus.*

740. Suppoſons l'angle $KLX = m$, l'angle KLM

$= x$, & par conſéquent l'angle $MLX = m - x$ le ſinus total $ML = 1$. On a par la propriété dont nous venons de parler, ſin. x.coſ. $(m - x) =$ 2 coſ. x ſin. $(m - x)$. Or, par les règles de la trigonomètrie, coſ. $(m - x) =$ coſ. m. coſ. x + ſin. m. ſin. x, ſin. $(m - x) =$ ſin. m. coſ. x — coſ. m. ſin. x, ſin. x coſ. $x = \frac{\text{ſin. } 2x}{2}$; $2(\text{coſ. } x)^2 - (\text{ſin. } x)^2 = \frac{1 + 3 \text{ coſ. } 2x}{2}$. Ainſi notre équation deviendra, toutes réductions faites, $\frac{\text{ſin. } 2x}{\frac{1}{3} + \text{coſ. } 2x} = \frac{\text{ſin. } m}{\text{coſ. } m}$ D'où ſuit cette conſtruction.

741. Ayant prolongé le raïon KL d'une quantité $LR = \frac{KL}{3}$, ſoit menée parallèlement à LX la droite RV qui rencontre en V l'arc KMX prolongé; & ſoit tiré le raïon VL. Si l'on diviſe en deux parties égales l'angle VLK, par la droite LM, le point M ſera le point demandé. Car en abaiſſant des points X & V les perpendiculaires XE, VH ſur le raïon KL, les triangles ſemblables XEL, VHR, donneront $\frac{VH}{RH} = \frac{XE}{LE}$, ou $\frac{VH}{RH} = \frac{\text{ſin. } m}{\text{coſ. } m}$, ou en faiſant l'angle $KLV = 2x = 2KLM$, $\frac{\text{ſin. } 2x}{\frac{1}{3} + \text{coſ. } 2x} = \frac{\text{ſin. } m}{\text{coſ. } m}$.

Fig. 73. 742. Lorſqu'à l'inſtant où le fluide choque le plan CD (Fig. 73), ce plan eſt en repos, mais que

le fluide tend toujours à le mouvoir ſuivant la direction donnée Cc; la vîteſſe initiale LI du plan $= 0$, la vîteſſe LK ſe confond avec la vîteſſe du fluide ; & la conſtruction précédente demeure la même à cela près que l'angle QLM doit être ſubſtitué à l'angle KLM. De-là ſuit la détermination de l'angle le plus avantageux que doit faire la direction du vent avec l'aîle d'un moulin à vent, lorſque cette aîle eſt en repos au moment où elle eſt frappée, ou lorſque la vîteſſe du vent peut être regardée comme infinie par rapport à celle de l'aîle. Car on ſçait que la cage d'un moulin à vent ordinaire eſt portée par un pivot vertical, tellement mobile que l'arbre horiſontal qui porte les aîles ſe place toujours dans la direction du vent, ſuppoſée horiſontale. Une aîle quelconque doit être regardée comme un rectangle vertical, poſé obliquement par rapport à l'arbre, afin que l'impulſion du vent puiſſe ſe décompoſer en deux forces l'une parallèle à l'arbre, qui eſt détruite, l'autre ſituée dans un plan perpendiculaire à l'arbre, qui fait tourner la machine. On voit donc que pour déterminer la poſition la plus avantageuſe de l'aîle dans l'hypothèſe propoſée, il faut faire non-ſeulement $LI = 0$, mais qu'il faut de plus ſuppoſer Cc perpendiculaire à la direction OL du fluide. Alors on trouve que l'angle QLM eſt de 54 degrés 44 minutes.

743. L'hypothèſe générale que le plan CD a une vîteſſe initiale & finie LI, lorſqu'il eſt frappé par le fluide, peut donner quelqu'idée de la poſition la plus

avantageuſe des aîles d'un moulin à vent qui tourne avec une vîteſſe comparable à celle du vent, comme elle l'eſt toujours en effet dans la pratique. On trouve en ce cas que le vent doit frapper l'aîle ſous un angle de plus de 54 degrés 44 minutes. Mais ſi on veut réſoudre ce problême en rigueur, il faut conſidérer que les différens points d'une même aîle étant placés à différentes diſtances de l'axe de l'arbre, ils ont différentes vîteſſes de rotation dont on doit tenir compte dans le calcul. De plus il faut remarquer que la vîteſſe de l'aîle peut être telle que ſa partie inférieure étant frappée par le vent, ſon extrémité ſupérieure frappe au contraire le vent; ce qui demande qu'on prenne alors la différence & non pas la ſomme des impulſions. Toutes ces conſidérations compliquent le problême & en rendent le calcul très-long. Voyez le Traité *des Fluxions* de M. Maclaurin, art. 910, 911, 912, 913, 914; le *Traité des Fluides* de M. d'Alembert, *nouv. éd. pag.* 397 & 398; les *Opuſcules Math.* du même Auteur, *tom. V, pag.* 148 & ſuiv. Voy. auſſi les recherches de M. Euler ſur la même matière (*nouv. Mém. de Pétersbourg, tom.* IV). Dans ces recherches, M. Euler trouve non-ſeulement la poſition qu'une aîle ſuppoſée *plane* doit avoir, & la vîteſſe qu'elle doit prendre par rapport à celle du vent, pour que la machine produiſe le plus grand effet poſſible; mais il examine auſſi la queſtion pour des aîles courbes. Il détermine en général la meilleure figure des aîles, ou l'angle ſous lequel il conviendroit que la ſurface d'une

d'une aîle coupât en chaque endroit la direction du vent. &c.

SECTION II.

Expériences & Réflexions sur la percussion des Fluides.

744. La théorie de la percussion des fluides, que je viens d'exposer, est fondée sur des principes fort simples & d'un usage commode dans la pratique. Mais, comme nous l'avons déja insinué (718), elle est sujette à quelques difficultés. On y suppose que toutes les molécules frappent les corps qu'elles rencontrent, de la même manière que si elles étoient des corps isolés & libres. Or pour que le choc se fît ainsi, il faudroit que chaque molécule, après avoir donné son coup, fût anéantie pour permettre à la molécule suivante de donner aussi le sien. Il est visible que la surface choquée ne reçoit pas immédiatement & dans toute son intensité l'impulsion de chaque particule. Les particules centrales sont frappées par celles qui leur succèdent, & la colonne est forcée de s'élargir jusqu'à une certaine distance de la surface choquée, pour laisser au fluide la liberté de s'échapper, & de faire place à celui qui arrive continuellement. Il suit de-là que la percussion d'un fluide contre un plan ne doit pas être calculée comme si ce plan recevoit en effet le choc de tous les filets fluides & parallèles qui lui répondent. Mais ne pour-

roit-il pas ſe faire que les chocs fuſſent ſemblablement dénaturés, & que les chocs effectifs ſuiviſſent entr'eux la même loi, du moins à peu près, que les chocs naturels & théoriques? Nous allons conſulter là-deſſus l'expérience, & nous examinerons quatre choſes; 1°. quelle eſt la meſure de la percuſſion perpendiculaire; 2°. ſi les percuſſions perpendiculaires, ſous même vîteſſe, ſont proportionnelles aux ſurfaces choquées; 3°. ſi les percuſſions perpendiculaires contre des ſurfaces égales ſont proportionnelles aux quarrés des vîteſſes; 4°. enfin ſi les différentes ſortes de percuſſions ſont (toutes choſes d'ailleurs égales) proportionnelles aux quarrés des ſinus des angles d'incidence.

Fig. 75, 76, 77. 745. Les Figures 75, 76, 77, repréſentent la balance dont je me ſuis ſervi pour meſurer le choc de l'eau. Le fleau AB a $3\frac{1}{2}$ pieds de longueur, & il eſt taillé par en-haut en couteau, pour qu'il ne s'y amaſſe pas d'eau. Il porte à l'une de ſes extrémités une plaque de cuivre $efgh$, bien plane & bien polie, dont la ſurface ſupérieure prolongée paſſeroit par l'axe de mouvement de la balance, & dont le centre A répond à l'axe TA du petit tuyau additionnel & vertical $PQqp$ par lequel l'eau ſort pour la venir frapper. Elle a $2\frac{1}{2}$ pouces de diamètre. Pour s'aſſurer de la poſition exacte du centre A, on a mis aux points e, f, g, h quatre pointes d'aiguille, leſquelles comparées à des points de repaire placés dans la baſe pq du tuyau $PQqp$, ſervent à couper exactement ce même tuyau en deux parties

égales, en différens ſens. La tige de la balance coule dans un canon; & au moyen d'une vis on peut la hauſſer & la baiſſer à volonté & la faire tourner horiſontalement. Le demi-cercle gradué *MON* eſt garni d'un fil à plomb qui ſert à mettre la balance dans une poſition horiſontale ou inclinée à volonté. Dans chaque expérience, on met en *S* un poids pour contrebalancer l'effort de l'eau.

EXPÉRIENCES I, II, III, IV.

746. La hauteur conſtante *TA* de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du centre *A* de la plaque (Fig. 75 & 76) eſt de 4 pieds. On a laiſſé 1 pouce d'intervalle entre le centre *A* de cette même plaque & le bout du tuyau, pour permettre à l'eau de ſortir librement. Elle ſort dans tous les cas à plein tuyau. Cela poſé, Fig. 75 & 76.

I. Le diamètre *pq* du tuyau étant de 10 lignes, le poids *S* qui fait équilibre au choc perpendiculaire de l'eau (Fig. 75) eſt de 1 livre 5 onces 7 gros 8 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 12608 grains *.

II. Le diamètre *pq* étant toujours de 10 lignes, le poids *S* qui fait équilibre au choc oblique de l'eau (Fig. 76), ſous un angle *TAB* de 60 degrés, eſt de 1 livre 5 onces 2 gros 8 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 12248 grains.

III. Le diamètre *pq* étant de 6 lignes, le poids

* On ſçait que la livre, poids de marc, = 2 marcs = 16 onces; l'once = 8 gros; le gros = 72 grains.

S qui fait équilibre au choc perpendiculaire de l'eau (Fig. 75) eſt de 7 onces 6 gros 20 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 4484 grains.

IV. Le diamètre *pq* étant toujours de 6 lignes le poids *S* qui fait équilibre au choc oblique de l'eau (Fig. 76), ſous un angle *TAB* de 60 degrés, eſt de 2 onces 3 gros 67 grains, c'eſt-à-dire, en tout, de 4315 grains.

EXPÉRIENCES V, VI, VII, VIII.

747. La hauteur conſtante *TA* de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du centre *A* de la plaque eſt de 2 pieds. Il y a toujours 1 pouce d'intervalle entre le centre *A* de cette plaque & le bout du tuyau; & l'eau ſort à plein tuyau.

I. Le diamètre *pq* du tuyau étant de 10 lignes, le poids *S* qui fait équilibre au choc perpendiculaire de l'eau (Fig. 75) eſt de 10 onces 7 gros 42 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 6306 grains.

II. Le diamètre *pq* étant toujours de 10 lignes, le poids *S* qui fait équilibre au choc oblique de l'eau (Fig. 76), ſous un angle *TAB* de 60 degrés, eſt de 10 onces 5 gros 5 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 6125 grains.

III. Le diamètre *pq* étant de 6 lignes, le poids *S* qui fait équilibre au choc perpendiculaire de l'eau (Fig. 75), eſt de 3 onces 7 gros 11 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 2243 grains.

IV. Le diamètre *pq* étant toujours de 6 lignes, le poids *S* qui fait équilibre au choc oblique de l'eau

(Fig. 79), ſous un angle *TAB* de 60 degrés, eſt de 3 onces 5 gros 70 grains, c'eſt-à-dire, en tout de 2158 grains.

Réflexions.

748. Il y a des Auteurs qui prétendent que lorſqu'un fluide frappe perpendiculairement un plan, la force du choc eſt égale au poids d'une colonne du même fluide, laquelle auroit pour baſe l'orifice ou la ſurface choquée, & pour hauteur la hauteur dûe à la vîteſſe de l'eau. D'autres font cette force double. Examinons, par le moyen des Expériences I, III, V, VII, lequel de ces deux ſentimens eſt le mieux fondé. Je ſuppoſe que le pied cube d'eau peſe 70 livres. Puiſque dans nos expériences, l'eau ſort par des tuyaux additionnels dont elle ſuit les parois, la hauteur dûe à ſa vîteſſe n'eſt (387) qu'environ les deux tiers de la hauteur de l'eau dans le réſervoir au-deſſus du centre de la plaque. D'après ces données, on trouve les poids des colonnes cylindriques d'eau que nous avons beſoin de conſidérer, comme il eſt exprimé ici.

Diam. de la col.	Haut. de la col.	poids.
10 lignes.	$\frac{8}{3}$ pieds.	6518 grains.
6	$\frac{8}{3}$	2346
10	$\frac{4}{3}$	3259
6	$\frac{4}{3}$	1173.

Cela poſé, ſi l'on compare ces poids avec ceux qui meſurent la percuſſion dans les quatre expériences

citées, on verra que le premier ſentiment ſur la meſure de la percuſſion des fluides eſt entiérement erroné, mais que le ſecond ne s'éloigne pas beaucoup de la vérité. Cependant il paroît qu'on y ſuppoſe encore la force dont il s'agit un peu plus grande qu'elle n'eſt réellement.

J'ai obſervé que lorſque la plaque *efgh* touche l'orifice *pq*, la percuſſion eſt ſenſiblement moindre (toutes choſes d'ailleurs égales), que quand il y a un certain intervalle entre l'orifice & la plaque, pour permettre à l'eau d'acquérir toute la plénitude de vîteſſe dont elle eſt ſuſceptible. Dans le premier cas, il s'en faut peu que la percuſſion perpendiculaire ne ſoit égale au poids d'une colonne qui auroit pour baſe l'orifice, & pour hauteur celle de l'eau au-deſſus du même orifice. Les Auteurs du premier ſentiment ont peut-être fait ainſi les expériences ſur leſquelles ils l'ont ſoutenu.

749. Par la comparaiſon de l'expérience I, avec l'expérience III, & de l'expérience V avec l'expérience VII, il paroît qu'à vîteſſes égales, les percuſſions perpendiculaires ſont ſenſiblement proportionnelles aux ſurfaces choquées. En effet, à vîteſſes égales, les molécules ſont ſemblablement détournées de leurs directions; & les coups qu'elles donneroient naturellement, ſi elles étoient libres, doivent être altérées à peu près de la même manière dans les deux cas. Cependant il eſt bon d'obſerver que le choc paroît augmenter ou diminuer en plus grande raiſon que la ſurface, ſoit parce que le dé-

tour des molécules eſt plus ſenſible, & diminue plus à proportion le choc, ſur une petite ſurface que ſur une grande, ſoit parce que la vîteſſe du fluide diminue un peu par le frottement, lorſque l'orifice diminue, ſoit enfin par ces deux cauſes combinées enſemble. Je ne crois pas qu'on puiſſe ſe tromper beaucoup dans la pratique, en ſuppoſant, comme la théorie le demande (719), que la vîteſſe du fluide étant donnée, le choc perpendiculaire de l'eau contre un plan eſt proportionnelle à la ſurface choquée.

750. En comparant enſemble les expériences I & V, & les expériences III & VII, on voit que les percuſſions perpendiculaires contre une même ſurface ſont entr'elles, à très-peu de choſe près, comme les hauteurs au-deſſus des centres de percuſſion; ou, ce qui revient au même, comme les quarrés des vîteſſes des fluides. L'expérience s'accorde donc ici ſenſiblement avec la théorie (720).

751. Lorſque l'eau frappe obliquement la plaque comme dans les expériences II, IV, VI, VIII, il réſulte de ce choc, ſuivant la théorie (726), une force perpendiculaire à la plaque, laquelle eſt repréſentée par $F \times \frac{B \times p^2}{A \times R^2}$, en nommant R le ſinus total, p le ſinus de l'angle TAB, A la partie de la plaque, qui répond à l'orifice pq, quand la balance eſt horiſontale, F l'impulſion que cette ſurface reçoit alors, B la partie de la plaque que l'eau vient couvrir obliquement. Cette force a pour bras de levier le bras CA de la balance, tandis que le poids

S qui lui fait équilibre, a ſimplement pour bras de levier la perpendiculaire CL menée du centre C ſur ſa direction. On aura donc, $F \times \frac{B \times p^2}{A \times R^2} \times CA = S \times CL$. Or $CL = CB \times \frac{p}{R} = CA \times \frac{p}{R}$; & par la théorie des projections, $B = A \times \frac{R}{p}$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouvera $S = F$. Ainſi, ſelon la théorie, il faudroit toujours le même poids S pour faire équilibre au choc de l'eau, ſoit que la balance fût horiſontale ou inclinée ſous un angle quelconque à l'horiſon. Or les quatre expériences citées ſont contraires à ce réſultat. Plus l'angle TAB diminue, plus le poids S diminue. Concluons donc qu'à l'égard de la manière dont les ſinus des angles d'incidence entrent dans les expreſſions des chocs perpendiculaire & oblique comparés enſemble, la théorie ne s'accorde pas avec l'expérience.

Du reſte il eſt bon d'obſerver que l'une des cauſes pourquoi la percuſſion perpendiculaire eſt plus grande, ſelon l'expérience, par rapport à la percuſſion oblique, qu'elle ne devroit l'être ſelon la théorie; c'eſt que dans le choc perpendiculaire les molécules, après avoir donné leur coup, ont moins la liberté de s'échapper que dans le choc oblique, & qu'en conſéquence il ſe forme ſur la plaque, dans le premier cas, un petit amas d'eau qui par ſon poids augmente un peu la percuſſion.

752. Il ſuit des diſcuſſions précédentes que les percuſſions perpendiculaires des fluides contre des ſurfaces planes ſuivent entr'elles, à peu de choſe près, les proportions établies par la théorie ; mais qu'il n'en eſt pas de même pour les percuſſions obliques contre des ſurfaces planes, ni par conſéquent auſſi pour les percuſſions contre des ſurfaces courbes qu'on peut regarder comme des aſſemblages de ſurfaces planes qui ſe préſentent au choc du fluide ſous différentes obliquités.

On objectera ſans doute que mes expériences ont été faites trop en petit pour être déciſives. Je ne les donne pas pour telles. Mais je prie le Lecteur d'obſerver que ces ſortes d'expériences ſont très-difficiles à faire en grand avec une certaine préciſion ; que les miennes ont l'avantage d'être très-directes ; que je n'y ai employé aucun mouvement de rotation, que j'y ai meſuré immédiatement la percuſſion ſans avoir aucun frottement ni aucune autre réſiſtance à conſidérer & à déduire ; & qu'enfin elles ſont ſuſceptibles d'une très-grande préciſion que je crois être ſûr d'y avoir apportée.

753. Pluſieurs Auteurs ont fait des expériences & des recherches ſur la percuſſion ou réſiſtance des fluides. On en trouve dans le *Traité du mouvement des eaux* de Mariotte, dans les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, dans la Phyſique de s'Graveſande, &c. M. le Chevalier de Borda, a donné deux excellens Mémoires ſur la même matière. (Mém. de l'Acad. an. 1763 & 1767.) En voici le précis.

Dans le premier, l'Auteur commence par déterminer la résistance que l'air oppose aux surfaces qui le choquent. Il employe pour cela une espèce de volant aux extrémités duquel on attache des surfaces de toute espèce. Cette machine est composée 1°. d'un axe ou arbre horisontal, parfaitement mobile sur ses appuis; 2°. d'une verge qui traverse perpendiculairement l'arbre, qui forme de part & d'autre deux branches, longues chacune d'environ 3 pieds, d'une forme tranchante pour mieux fendre l'air, & destinées à porter à leurs bouts les surfaces qu'on veut exposer au choc de l'air; 3°. d'une bobine cylindrique horisontale, enfilée par l'axe de l'arbre, & autour de laquelle s'enveloppe une corde qui soutient un poids. Ce poids en descendant fait tourner la machine & oblige ainsi les surfaces placées aux extrémités de la verge dans la direction perpendiculaire à celle du mouvement, de frapper l'air. M. le Chevalier de Borda expose au choc de l'air deux plaques quarrées, ayant successivement 9 pouces, 6 pouces, 4 pouces de côté; & il fait tourner séparément chaque paire avec des poids de 8 livres, 4 livres, 2 livres, 1 $\frac{1}{2}$ livre; il estime les vîtesses par le nombre de vibrations que fait un pendule à demi-secondes pendant que le poids moteur descend d'une hauteur connue, & il attend pour cela que le mouvement soit devenu parfaitement uniforme; ce qui arrive toujours après les quatre ou cinq premières révolutions. Après avoir tenu compte du frottement & de la résistance que la machine seule éprouve quand

il n'y a point de plaques aux bouts de la verge; l'Auteur conclut de ses expériences, 1°. qu'en faisant varier seulement le poids moteur ou la vîtesse du volant, les resistances suivent fort exactement la proportion des quarrés des vîtesses, & qu'en cela l'expérience s'accorde avec la théorie; 2°. qu'en conservant la même vîtesse, mais faisant varier la surface, les résistances ne suivent pas le rapport des surfaces, & qu'une grande surface éprouve plus de résistance, à proportion, qu'une petite. Voilà pour la résistance des surfaces planes & frappées directement par l'air. M. le Chevalier de Borda a exposé au choc du même fluide des surfaces inclinées & courbes, comme des prismes, des cylindres, des sphères; & il a trouvé que quant à la loi suivant laquelle les sinus des angles d'incidence affectent le choc, non-seulement les résultats de l'expérience ne s'accordent pas avec ceux de la théorie; mais que souvent les premiers vont en sens contraires des seconds. Il finit par rapporter des expériences sur la résistance de l'eau, qu'il a faites à Dunkerque dans le bassin de la Marine du Roi. Ayant fait construire une petite caisse qui avoit extérieurement 1 pied quaré de base & 14 pouces de hauteur, & l'ayant bien calfatée, il la mettoit sur l'eau; & par le moyen d'un peu de lest, il la faisoit enfoncer jusqu'à la profondeur de 1 pied, de manière que la partie qui étoit dans l'eau, avoit 1 pied en tout sens. Elle étoit tirée & mue horisontalement par un poids, au moyen d'un fil d'argent qui alloit passer sur une poulie fixe, & qui por-

toit le poids moteur & le laiſſoit deſcendre dans l'eau pendant l'expérience. Tantôt on la faiſoit mouvoir, perpendiculairement à l'une de ſes faces, tantôt dans la direction de l'une de ſes diagonales; & on meſuroit, comme ci-deſſus, la vîteſſe par le temps que le poids mettoit à deſcendre uniformément dans l'eau d'une hauteur donnée. Selon la théorie (733), les réſiſtances dans les deux cas auroient dû être entr'elles, comme les nombres 10 & 7 environ; & elles ont été trouvées comme les nombres $5\frac{1}{3}$ & 7. Delà l'Auteur conclut que les règles de la théorie, pour la meſure des percuſſions obliques, ſont entièrement erronées.

Dans le ſecond Mémoire, il ne s'agit que de la réſiſtance de l'eau. M. le Chevalier de Borda employe, pour la meſurer, un volant, comme dans ſes expériences ſur la réſiſtance de l'air, avec cette différence qu'ici le volant tourne horiſontalement, au lieu que pour l'air il tournoit verticalement. Le baſſin qui contenoit l'eau étoit circulaire; il avoit 12 pieds de diamètre; celui du volant étoit de 8 pieds. On attachoit verticalement à l'un des bouts du volant, au moyen d'une verge tranchante dans le ſens du mouvement, les corps qu'on vouloit plonger dans l'eau pour meſurer la réſiſtance qu'ils y éprouvent. Le centre du baſſin étoit occupé par une colonne cylindrique, auſſi haute que ſon bord; le deſſus de cette colonne portoit une crapaudine qui recevoit le pivot inférieur d'un arbre vertical, dont l'autre pivot étoit reçu en-haut par un collet. Cet arbre

portoit la traverſe horiſontale du volant, & une bobine cylindrique autour de laquelle s'enveloppoit une corde qui alloit paſſer ſur une poulie, & qui ſoutenoit le poids moteur. Les expériences ſe font d'ailleurs ici comme pour l'air. L'Auteur a principalement déterminé la réſiſtance que les corps ſphériques éprouvent dans l'eau. Il a trouvé 1°. qu'à égale ſurface & pour des ſphères enfoncées dans l'eau, les réſiſtances ſont proportionnelles aux quarrés des vîteſſes; 2°. que la réſiſtance de la partie convexe de la demi-ſphère eſt, à peu de choſe près, la même que celle de la ſphère entière, & que par conſéquent la partie antérieure des corps eſt la ſeule choſe qui cauſe de la réſiſtance, du moins quand les vîteſſes ſont petites; 3°. que la réſiſtance de la ſphère eſt à celle de ſon grand cercle, comme 2 eſt à 5 environ, tandis que, ſelon la théorie (737), ces deux réſiſtances devroient être entr'elles dans le rapport de 2 à 4, ou de 1 à 2; 4°. que la réſiſtance d'une ſphère eſt moindre, lorſque cette ſphère eſt enfoncée dans l'eau, que lorſqu'elle ſe meut à la ſurface de l'eau; 5°. que les réſiſtances d'une même ſphère qui ſe meut à la ſurface de l'eau avec différentes vîteſſes, croiſſent en plus grand rapport que les quarrés de ces vîteſſes. Il conclut de ce Mémoire, comme du précédent, que la théorie ordinaire de la percuſſion des fluides eſt erronée, & qu'il ſeroit par conſéquent inutile & même dangereux de l'appliquer à l'art de la conſtruction des vaiſſeaux.

754. Sur toutes ces conſidérations, il n'eſt pas

permis de douter que la théorie dont il s'agit ne doive être abandonnée, du moins quant à la partie qui concerne les chocs obliques, priſe dans toute ſon étendue. Mais il ne ſuffit pas de détruire, il faut édifier, s'il eſt poſſible. Si on proſcrit la méthode propoſée, que mettra-t-on à ſa place ? Quelle théorie exacte dans les principes offrira en même temps des calculs aſſez ſimples, pour que les réſultats en puiſſent être appliqués à la pratique ? Voilà la grande difficulté qu'on n'a pas encore pu lever, & qui, vu l'état d'imperfection où eſt l'analyſe, eſt vraiſemblablement inſoluble, à cauſe du grand nombre d'élémens qu'il faudroit faire entrer dans le problême, & qui le rendent comme intraitable. Il a beaucoup exercé & exerce encore les Géomètres. Donnons une idée générale des recherches qu'ils ont publiées ſur ce ſujet.

755. Newton, dans ſes *Principes Mathématiques*, *liv. II*, *ſect. VII*, enviſage la queſtion ſous différens points de vûe, ſelon la différence des fluides ou milieux dans leſquels les corps ſe meuvent. Il ſuppoſe d'abord un milieu rare, compoſé de parties égales & ſituées librement à des diſtances égales ; & il fait voir par la méthode dont nous nous ſommes ſervi (736), que ſi un globe & un cylindre de diamètres égaux ſe meuvent avec une vîteſſe égale dans un tel milieu, la réſiſtance du globe n'eſt que la moitié de celle du cylindre. Cette propoſition établie, il cherche la réſiſtance abſolue que le globe éprouve, ſoit que les parties du milieu ſoient parfaitement

élaſtiques, ou qu'elles ſoient dénuées d'élaſticité ; il trouve dans le premier cas que la réſiſtance du globe eſt à la force par laquelle le mouvement total du globe peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il employe à parcourir les deux tiers de ſon diamètre par une vîteſſe uniformément continuée, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du globe ; & dans le ſecond cas que la réſiſtance eſt deux fois moindre. Il examine enſuite la réſiſtance dans les milieux continus, tels que l'eau, le mercure, l'huile chaude, &c ; & il donne une autre théorie pour ces ſortes de milieux dans leſquels le globe ne frappe pas immédiatement toutes les parties réſiſtantes du fluide, mais communique ſeulement aux parties les plus voiſines une preſſion qui ſe tranſmet de proche en proche aux autres parties. Selon cette théorie qui eſt fondée ſur pluſieurs propoſitions, & qui n'eſt pas ſuſceptible d'extrait, la réſiſtance du globe eſt la même que celle du cylindre circonſcrit, réſultat entièrement contraire à l'expérience (753), & d'où l'on doit conclure, ſans aller plus loin, que cette même théorie eſt fondée ſur des principes inexacts.

756. Dans le ſecond volume des anciens Mémoires de l'Académie de Péterſbourg, M. Daniel Bernoulli détermine la réſiſtance des fluides par une méthode qui lui eſt propre, mais qu'il a abandonnée depuis, comme donnant des réſultats contraires à l'expérience. Il propoſe dans le tom. VIII des mêmes Mémoires, une autre méthode très-ingénieuſe & très-élégante pour déterminer le choc perpendicu-

laire d'une veine fluide qui ſort d'un vaſe, contre un plan. Il obſerve qu'en ſuppoſant au plan une certaine étendue, les filets dont la veine eſt compoſée, finiſſent par ſe fléchir ſuivant des directions parallèles au même plan. Il regarde la courbe décrite par chaque filet comme un canal dans lequel ſe meut un corps qui éprouve par conſéquent en chaque point l'action de la force centrifuge, & que l'Auteur ſuppoſe de plus ſoumis à l'action d'une force tangentielle, variable ſuivant une loi quelconque. Il calcule toutes ces forces, & il trouve qu'il en réſulte parallèlement à l'axe de la veine, ou perpendiculairement au plan une impulſion égale au poids d'un cylindre du fluide, qui auroit pour baſe la ſection de la veine avant que les filets ne commencent à ſe fléchir; & pour hauteur le double de la hauteur dûe à la vîteſſe du fluide; ce qui eſt aſſez conforme à l'expérience (748). Cette méthode s'applique difficilement aux chocs obliques, & à plus forte raiſon aux chocs contre des ſurfaces courbes; elle ne peut pas avoir lieu pour meſurer la réſiſtance des corps mus dans des fluides où ils ſont ſubmergés.

757. M. d'Alembert dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides* détermine les loix de la réſiſtance des fluides par celles de leur équilibre; & cette méthode qui eſt entièrement nouvelle, a de plus l'avantage d'être très-directe. Il ſuppoſe d'abord un corps retenu en repos par quelque cauſe extérieure, au milieu d'un fluide qui vient le choquer. Les filets à la rencontre du corps ſe fléchiſſent ſuivant différentes

directions;

directions; & la portion de fluide qui couvre la partie antérieure du corps est comme stagnante dans une certaine étendue. L'Auteur observe que la pression soufferte par le corps, ou la résistance qu'il oppose au mouvement des particules, est produite par les pertes de vîtesses que font ces molécules; car un corps n'agit sur un autre corps qu'autant qu'il lui communique, ou tend à lui communiquer une partie de son mouvement. Il fait voir que la question se réduit à trouver d'abord la vîtesse du fluide qui glisse immédiatement sur la surface du corps, & il la détermine par deux méthodes différentes. Cette vîtesse étant trouvée, on a la formule rigoureuse de la pression. Il ne s'agiroit plus que d'achever ce calcul, & de parvenir à des résultats qui fussent applicables à la pratique. Mais c'est un but qu'on ne doit pas espérer d'atteindre, en traitant ainsi la question généralement & sans négliger aucun des élémens qui lui sont essentiels. L'Auteur détermine par sa méthode un peu modifiée & rendue moins rigoureuse, l'action d'une veine fluide qui frappe un plan. Il trouve que cette action est un peu moindre que le poids d'un cylindre qui auroit pour base la largeur de la veine, & pour hauteur le double de la hauteur dûe à la vîtesse du fluide, résultat conforme à l'expérience (748), à peu de chose près. L'ouvrage de M. d'Alembert contient plusieurs autres recherches, & brille par-tout du génie de l'invention.

758. Frappé de la simplicité des principes & des résultats que présente la méthode ordinaire du choc

des fluides, & admettant d'un autre côté que l'impulsion d'un fluide contre un corps, n'est autre chose que la pression soufferte par ce corps, de la part des filets qui glissent le long de sa surface, M. Euler combine ensemble les deux méthodes dans un sçavant Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Pétersbourg, An. 1763; & il en forme une méthode *mixte*, qu'il croit propre à déterminer la résistance des fluides d'une manière assez simple & assez exacte, en plusieurs occasions. Voici briévement en quoi elle consiste.

Fig. 78. 759. Soit $AMBN$ (Fig. 78) un corps en repos, exposé au choc d'un fluide. Pour plus de simplicité, supposons que ce corps soit divisé en deux parties égales & semblables AMB, ANB par son axe AB placé dans la direction du fluide; & ne considérons que la partie AMB, car les raisonnemens sont les mêmes pour l'autre partie. Le fluide est composé de filets qui à la rencontre de la partie antérieure EAN du corps se fléchissent & forment les courbes $fgqe$, $f'g'q'e'$. Soit Mm un élément de la courbe AE. Nommons k la hauteur dûe à la vîtesse que le fluide auroit naturellement en M, si le corps ne lui opposoit aucun obstacle, v la hauteur dûe à la vîtesse effective & actuelle du fluide en M. Suivant l'idée que nous avons donnée (651) de la pression des fluides en mouvement, contre les obstacles qu'on leur oppose, la pression que souffre l'élément Mm est exprimée par $Mm \times (k - v)$. Mais d'un autre côté, si on mène MR parallèle à l'axe AB, & qu'on

nomme 1 le finus total, ϕ l'angle mMR que fait l'élément mM avec MR, la théorie ordinaire de la percuffion des fluides donnera (725), $Mm \times k \times (\text{fin.}\ \phi)^2$, pour le choc qui réfulte perpendiculairement contre Mm. Egalant cette valeur du choc ou de la preffion, à la précédente, on aura $Mm \times (k - v) = Mm \times k \times (\text{fin.}\ \phi)^2$, ou bien $v = k - k \times (\text{fin.}\ \phi)^2 = k \times (1 - (\text{fin.}\ \phi)^2) = k \times (\text{cof.}\ \phi)^2$. Donc $\sqrt{v} = \sqrt{k} \times \text{cof.}\ \phi$. Ainfi la vîteffe du fluide en M, eft à fa vîteffe primitive & non altérée, comme le cofinus de l'angle que fait la tangente en M avec l'axe AB, eft au finus total. Donc, lorfque la tangente devient parallèle à l'axe, comme cela arrive en E par exemple, la vîteffe en ce même endroit E eft égale à la vîteffe primitive du fluide. On voit donc que pour avoir k, il fuffira de mefurer la vîteffe du fluide à l'endroit où la tangente du corps devient parallèle à l'axe. Par-là, on connoîtra toujours d'une manière affez commode dans la pratique, la vîteffe v, & par conféquent auffi la preffion $Mm \times (k - v)$ que fouffre l'élément Mm.

760. Cette méthode, comme M. Euler le remarque lui-même, ne peut être employée que pour la partie antérieure AME du corps, & non pour la poftérieure ESB. En effet, il eft évident que fi l'on fuppofoit que le fluide a la même vîteffe le long de EB que de AE, le corps feroit autant repouffé dans le fens BA qu'il eft pouffé dans le fens AB, & que par conféquent il ne recevroit aucun mouvement de la part du fluide; ce qui ne peut jamais avoir lieu.

761. Il y a plus. On doit remarquer que la difficulté dont je viens de faire mention subsistera toujours, de quelque manière qu'on détermine les vîtesses des filets du fluide. Elle porte sur le principe même que l'action d'un fluide contre un corps exposé à son cours, provient de la pression de ce fluide. Si la chose est en effet ainsi, il s'ensuit que toutes les fois que la figure du corps sera telle que les filets fluides auront la même vîtesse le long de la partie postérieure que le long de la partie antérieure (ce qui peut arriver en plusieurs cas); il s'ensuit, dis-je, que le fluide ne tendra à imprimer aucun mouvement au corps : résultat inadmissible. Il paroît donc qu'outre la pression, il se fait dans le fluide une perte de mouvement qui passe au corps exposé à son courant.

762. Que conclure enfin de tant de remarques? Que la théorie de la résistance des fluides est encore imparfaite à plusieurs égards; qu'on ne peut guères se flatter de la perfectionner & de la rendre applicable à la pratique, qu'en la fondant sur des expériences en grand, multipliées & bien faites; qu'en attendant que ce travail pénible & délicat soit exécuté, tout ce qu'on peut faire de mieux, peut-être, dans la pratique, est d'employer la théorie ordinaire, lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande précision dans les résultats, & lorsque les chocs se font sur des surfaces planes, sous des angles qui ne sont pas fort petits.

CHAPITRE X.

De la meilleure manière d'employer l'action d'un fluide pour mouvoir une machine.

763. On appelle indiſtinctement *machine hydraulique*, une machine qui eſt deſtinée à élever de l'eau à une certaine hauteur, ou qui eſt mue par l'action d'un courant. Les agens qui produiſent ou entretiennent le mouvement dans le premier cas, peuvent être de telle eſpèce qu'on voudra. Souvent une machine deſtinée à élever de l'eau eſt en même temps mue par l'action d'un courant. Elle eſt alors doublement hydraulique. Les effets de toutes ces machines ſe déterminent, comme ceux des autres, par les loix connues de la méchanique.

764. Sans rappeller ces loix en détail, conſidérons que la force mouvante a toujours un rapport déterminable par la forme & le jeu de la machine, à l'effet réel & utile que cette même machine produit relativement à l'objet qu'on s'eſt propoſé en la conſtruiſant. Cette force & cet effet peuvent s'exprimer par des poids connus, animés de vîteſſes connues. Soient donc P le premier poids, V ſa vîteſſe, Q le ſecond poids, v ſa vîteſſe. Il eſt d'abord évident que l'effet $Q.v$ ne peut jamais ſurpaſſer la

caufe $P.V$. C'eſt donc en vain que certains Machiniſtes penſent augmenter le produit de la force motrice, avec des leviers, des roues, ou d'autres moyens équivalens. Les leviers n'ont en eux-mêmes aucune vertu active : ils ne peuvent ſervir qu'à modifier différemment les deux facteurs P & V qui, par leur multiplication, compoſent la force mouvante. S'ils font augmenter le poids moteur P, ils font diminuer ſa vîteſſe V en même raiſon ; & réciproquement, s'ils font augmenter V, ils font diminuer P, dans le même rapport. L'effet $Q.v$ feroit égal à la cauſe entière $P.V$, ſi cette cauſe n'étoit pas employée en partie à vaincre le frottement ou à produire dans la machine des mouvemens étrangers & inutiles à celui dont on a beſoin. On a donc dans la pratique, $P.V > Q.v$. La meilleure machine ſera celle qui par ſa conſtruction & par le jeu de ſes pièces, rendra la quantité $Q.v$ la plus approchante qu'il eſt poſſible de $P.V$. Si l'on regarde $Q.v$ comme l'effet total de la machine, ou que l'on comprenne dans cette quantité non-ſeulement l'effet utile, mais encore ceux qui proviennent des réſiſtances, on aura dans tous les cas $Q.v = P.V$.

765. Je ne me propoſe point ici de diſcuter en particulier l'effet d'aucune machine hydraulique. Ces ſortes de diſcuſſions ſont longues, & ne peuvent d'ailleurs avoir aucune difficulté pour les Lecteurs verſés dans la méchanique. Mon objet eſt plus général ; je vais examiner la meilleure manière d'employer la force de l'eau, comme principe moteur d'une ma-

chine propoſée. Or, de tous les moyens de faire ſervir l'action d'un courant à mouvoir une machine, il n'y en a pas de plus ſimple, de plus commode, de moins ſujet à inconvénient, que de garnir cette machine d'une ou de pluſieurs roues qui reçoivent l'impulſion d'un courant d'eau, & qui la lui tranſmettent. Il eſt vrai qu'on a tenté dans ces derniers temps d'employer au même uſage la réaction de l'eau, d'après la remarque du célébre M. Daniel Bernoulli, que l'eau au ſortir d'un vaſe *repouſſe* ce vaſe avec une force dont il calcule l'effet précis. M. Jean-Albert Euler, digne héritier du génie & du ſçavoir de ſon illuſtre pere, propoſe dans une Piéce couronnée en 1754 par l'Académie de Gottingue, une machine mue par la réaction de l'eau, laquelle eſt plus avantageuſe, ſelon ſes calculs, que ſi elle étoit mue par le choc ou par le poids de l'eau qu'elle dépenſe. Mais cette machine paroît devoir rencontrer beaucoup de difficultés dans la pratique ; & j'ignore ſi elle a été exécutée. Quoi qu'il en ſoit, je me bornerai ici à la recherche de l'effet qu'une roue hydraulique peut produire, ſoit que cette roue ſoit mue par le choc de l'eau ou par ſon poids ; & je m'attacherai à lui procurer la forme & les dimenſions les plus propres à économiſer la force mouvante. Ce ſujet intéreſſant ſera traité d'une manière qu'on peut regarder comme nouvelle à pluſieurs égards. Si je contredis quelques Auteurs, je n'ai d'autre but que d'éclaircir la vérité.

SECTION I.

Théorie du mouvement des Roues mues par le choc de l'eau.

766. La théorie ordinaire de la percussion des fluides est sujette à plusieurs difficultés, comme nous l'avons vu. Néanmoins je m'en servirai ici, parce que les chocs qu'on a besoin de considérer ne sont pas ordinairement fort obliques, & que la théorie en question ne s'éloigne de plus en plus de la vérité qu'à mesure que l'obliquité des chocs devient plus grande. D'ailleurs je rapporterai des expériences qui serviront à rectifier les résultats qu'elle donne, & à fixer davantage l'opinion plus ou moins avantageuse qu'on en doit prendre.

Fig. 79. 767. Pour qu'une roue *AHLK* (Fig. 79) puisse tourner par l'impulsion d'un fluide, il faut qu'elle soit garnie à sa circonférence *d'aîles* ou *aubes* *AB*, *DE*, *KS*, &c que le fluide frappe successivement. Ces aîles sont pour l'ordinaire des rectangles dirigés au centre *C* de la roue, & alors les droites *AB*, *DE*, *KS*, *&c*, représentent les *hauteurs* des aîles, tandis que leurs *largeurs* sont représentées par les autres côtés des rectangles, perpendiculaires au plan de la roue. Je dis *pour l'ordinaire;* car il arrive quelquefois que les aîles ne sont pas dirigées au centre, & qu'elles n'ont pas la forme rectangulaire, comme nous le verrons dans la suite.

768. On ſent que la force dont une roue mue par le choc de l'eau, peut être capable, dépend de la poſition de ſes aîles, de leur nombre, de leur grandeur, & de la proportion qui exiſte entre ſa vîteſſe & celle du courant. Examinons donc comment tous ces élémens concourent à la compoſer, afin de découvrir la combinaiſon qui peut lui procurer toute l'intenſité dont elle eſt ſuſceptible.

769. Soit *XYTZ* (Fig. 79) un courant horiſontal dont tous les points ſe meuvent avec la même vîteſſe, & qui fait tourner la roue verticale *AHLK* garnie d'aîles rectangulaires *AB*, *DE*, *KS*, &c toutes dirigées vers le centre *C*. Que cette roue en tournant élève un poids Q, attaché à l'extrémité d'une corde Q*ghf* qui paſſe ſur la poulie de renvoi *g*, & qui s'enveloppe autour du cylindre ou tambour *fbd*. Dans les premiers inſtans du choc de l'eau, le mouvement du poids Q s'accélère; mais après trois ou quatre tours il parvient à l'uniformité, & demeure enſuite toujours en cet état. Alors l'impulſion du fluide eſt, à chaque inſtant, en équilibre avec le poids Q & avec la réſiſtance du frottement. On voit donc que la vîteſſe uniforme du poids Q étant repréſentée par v, le produit Qv repréſente l'effet réel de la machine, déduction faite des réſiſtances qui abſorbent continuellement une partie de la force mouvante. Fig. 79.

770. On a agité long-temps la queſtion ſi une aîle a plus de force pour tourner quand elle eſt frappée perpendiculairement, que quand elle eſt frappée

obliquement. Pour ſçavoir à quoi nous en tenir ſur ce point, ſuppoſons que l'aîle *AB* ſoit placée dans la verticale, & que par conſéquent l'aîle ſuivante *DE* ſoit inclinée au courant. Ayant pris ſur *AB* les deux points infiniment voiſins *R*, *r*, ſoient menées les horiſontales *RM*, *rm* qui déterminent ſur *DE* l'élément *Mm* correſpondant à *Rr*. Comparons entr'eux le moment de l'impulſion que recevroit l'élément *Rr*, s'il étoit frappé librement, ou que l'aîle *DE* par laquelle il eſt couvert fût anéantie, & le moment de l'impulſion qui réſulte perpendiculairement contre l'élément *Mm*. Le choc contre chaque point de *Rr* eſt plus grand que le choc contre chaque point de *Mm*. Mais d'un autre côté $Rr < Mm$, & le bras de levier *CR*, de *Rr*, eſt plus petit que le bras de levier *CM*, de *Mm*. L'évaluation exacte des deux momens dont il s'agit, peut ſeule décider lequel des deux eſt le plus grand.

771. Suppoſons que *Mx* repréſente l'eſpace parcouru en un inſtant par le fluide, & que *Rt*, *My* repréſentent les eſpaces parcourus durant le même inſtant par les points *R* & *M* des aîles *AB*, *DE*. En prenant *CM* pour ſinus total, & nommant *V* la vîteſſe *Mx* du fluide, *u* la vîteſſe *Rt* du point *R*, l'impulſion contre *Rr* ſera repréſentée (728) par $Rr \times (V - u)^2 \times \overline{CM}^2$; & le moment de cette impulſion, relativement au centre *C* de la roue, ſera repréſenté par $Rr \times (V - u)^2 \times \overline{CM}^2 \times CR$. Pour connoître le moment de l'impulſion contre *Mm*, je

décompoſe la vîteſſe Mx du fluide en deux autres My, Mz, dont la première eſt la même que celle du point M, & ne produit par conſéquent aucun effet ſur l'élément Mm, la ſeconde eſt la ſeule à laquelle il faille avoir égard. En vertu de cette dernière vîteſſe, il réſulte (728) perpendiculairement contre Mm une impulſion repréſentée par $Mm \times \overline{Mz}^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2$, & dont le moment, par rapport au centre C, eſt par conſéquent, $Mm \times \overline{Mz}^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2 \times CM$. Or puiſque My eſt perpendiculaire à CM, & que xzn eſt parallèle à My, il eſt clair que le triangle Mnx eſt rectangle en n, & ſemblable au triangle MRC. On a donc, $CM : CR :: Mx : xn = Mx \times \frac{CR}{CM} = V \times \frac{CR}{CM}$; & comme $zx = My = Rt \times \frac{CM}{CR} = u \times \frac{CM}{CR}$: On aura $nz = nx - zx = V \times \frac{CR}{CM} - u \times \frac{CM}{CR}$ $= \left(V - u \times \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2}\right) \times \frac{CR}{CM}$. Donc à cauſe de ſin. $DMz = nz \times \frac{CM}{Mz}$, ($CM$ étant toujours le ſin. tot.); le moment $Mm \times \overline{Mz}^2 \times (\text{ſin. } DMz)^2 \times CM$ deviendra $Mm \times \left(V - u \times \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2}\right)^2 \times \overline{CR}^2 \times CM$. Ainſi le moment de l'impulſion contre Rr, eſt au moment de l'impulſion contre Mm, comme $Rr \times (V - u)^2$

$\times \overline{CM}^2 \times CR$, eſt à $Mm \times \left(V - u \times \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2}\right)^2 \times \overline{CR}^2$ $\times CM$; ou comme $Rr \times (V - u)^2 \times CM$, eſt à $Mm \times \left(V - u \times \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2}\right)^2 \times CR$. Or, à cauſe des parallèles MR, mr, on a $Rr : Mm :: CR : CM$, & par conſéquent $Rr \times CM = Mm \times CR$. Donc le premier moment eſt au ſecond, comme $(V - u)^2$ eſt à $\left(V - u \times \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2}\right)^2$. Mais on a toujours $\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2} > 1$, & par conſéquent $V - u > V - u \times \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CR}^2}$. Donc enfin, le premier moment eſt toujours plus grand que le ſecond. Le même raiſonnement ayant lieu pour tous les autres élémens correſpondans dont les parties finies AO, VE des deux aîles AB, DE ſont compoſées, on doit conclure que le moment de l'impulſion de l'eau contre l'aîle verticale eſt plus grand que le moment de l'impulſion contre l'aîle inclinée au courant, & que par conſéquent la première aîle eſt à cet égard plus avantageuſe que la ſeconde.

772. Lorſque les aîles ſont en repos au moment qu'elles ſont choquées par le fluide, on a $u = 0$; & le moment de l'impulſion contre chaque élément

Rr devient égal au moment de l'impulſion contre chaque élément correſpondant *Mm*. Il eſt donc alors indifférent que le fluide frappe la partie *AO* de l'aîle verticale ou la partie correſpondante de l'aîle inclinée. Mais comme la partie *OB* de l'aîle verticale eſt encore frappée par le fluide, il s'enſuit que même en ce cas il eſt plus avantageux que l'aîle choquée ſoit poſée verticalement, que d'être inclinée au courant.

773. Des Auteurs ont établi en général l'avantage de l'aîle verticale ſur l'aîle inclinée, d'une manière erronée. Voici leur raiſonnement. Il eſt certain, diſent-ils, que ſi l'aîle *DE* trempe dans l'eau, tandis que l'aîle *AB* eſt encore dans la verticale, la partie *VE* de la première couvrira la ſeconde ſur toute la hauteur *AO* qui ne ſera point frappée, & qu'ainſi l'aîle *AB* ſera ſeulement frappée dans la partie *OB*. Il eſt vrai, pourſuivent-ils, que cette diminution de choc ſemble réparée par l'impulſion que reçoit la partie *VE*, qui eſt plus grande que la partie *AO*; mais la compenſation n'eſt pas complette. Car la percuſſion directe contre *AO* ou *VI* eſt à la percuſſion qui réſulte perpendiculairement contre *VE*, comme $VI \times (\text{ſin. } tot.)^2$, eſt à $VE \times (\text{ſin. } VEI)^2$, ou comme $VI \times \overline{VE}^2$, eſt à $VE \times \overline{VI}^2$, ou enfin comme *VE* eſt à *VI*. De-là, concluent-ils, il faut que l'extrémité *E* de l'aîle *DE* (Fig. 80) ne faſſe que rencontrer la ſurface *XY* du fluide, au moment que l'aîle *AB* ceſſe d'être verticale. Alors il eſt fa- Fig. 80.

cile de déterminer le nombre des aîles dont une roue doit être garnie. Car dans le triangle rectangle *EAC*, on connoît le côté *CA* qui eſt le raïon de la roue *AHLK*, & l'hypothenuſe *CE*, puiſque la hauteur *DE* de l'aîle eſt donnée. Ainſi on connoîtra l'arc *DA*. Diviſant la circonférence entière par la valeur de l'arc *DA*, le quotient exprimera le nombre des aîles de la roue. Les Auteurs dont il s'agit, ont ainſi calculé laborieuſement des tables du nombre des aîles d'une roue, relativement au raïon de cette roue & à la hauteur des aîles.

774. Tout cet échaffaudage de calcul tombe ; 1°. parce qu'on n'y tient pas compte des différens bras de levier de l'aîle verticale & de l'aîle inclinée ; 2°. parce que ſi dans le cas de la Figure 80, le moment de l'impulſion de l'eau contre l'aîle verticale *AB* eſt le plus grand qu'il eſt poſſible ; d'un autre côté lorſque l'aîle *DE* a pris une poſition telle que l'angle *ECB* eſt diviſé en deux parties égales par la verticale, le moment de l'impulſion eſt moindre alors qu'il ne ſeroit ſi la roue avoit un plus grand nombre d'aîles, & qu'on eſt incertain ſi le moment *moyen* ne ſera pas plus grand dans le ſecond cas que dans le premier.

775. Le même paralogiſme a déja été relevé dans un Mémoire ſur les machines hydrauliques, imprimé il y a quelques années. Mais l'Auteur de ce Mémoire a lui-même employé un faux principe, d'après lequel il conclut que le moment de l'impulſion contre la partie *VE* de l'aîle inclinée *DE*

(Fig. 79) eſt toujours égal au moment de l'impulſion contre la partie correſpondante *AO* de l'aîle verticale, ſoit que la roue ſoit en repos, ou tourne déja, à l'inſtant du choc. La choſe n'eſt vraie que pour le premier cas (771 & 772). La manière dont cet Auteur meſure la percuſſion d'un fluide contre un plan mobile, eſt fautive. Il décompoſe la vîteſſe du plan en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire, à la direction du fluide; & il affirme que le fluide n'agit ſur le plan qu'en vertu de l'excès de ſa propre vîteſſe ſur la première des deux vîteſſes dont on vient de parler. Or il eſt évident qu'en vertu de la vîteſſe que le plan a perpendiculairement à la direction du fluide, ce plan eſt repouſſé par l'eau de la même manière que s'il étoit en repos, & que l'eau vînt le frapper avec cette même vîteſſe; d'où réſulte une nouvelle impulſion qui ſe combine avec la première, & que l'Auteur a négligée mal-à-propos. Son Mémoire contient d'ailleurs pluſieurs choſes vraies & utiles. Fig. 79.

776. Puiſque dans le cas où la roue eſt en repos lorſqu'elle eſt frappée par le fluide, le moment de l'impulſion contre la partie *VE* de l'aîle inclinée, eſt égal au moment de l'impulſion contre la partie *AO* de l'aîle verticale (772); il s'enſuit qu'alors plus on multipliera le nombre des aîles, plus le fluide imprimera de force à la roue. Car en augmentant le nombre des aîles, on fait diminuer l'angle *ECB* compris entre deux aîles voiſines, & on augmente par conſéquent le moment de l'impulſion que reçoit

la roue lorſque les aîles ſe trouvent, relativement au choc, dans la poſition la plus défavorable, poſition qui arrive quand l'angle compris entre deux aîles contigues eſt diviſé en deux parties égales par la verticale. Comme la loi de continuité s'obſerve conſtamment dans les différens états d'accroiſſement ou de décroiſſement que peuvent ſubir les quantités de même eſpèce, concluons encore de-là que ſi une roue tourne avec une vîteſſe fort lente par rapport à celle du fluide, on augmentera ſa force en lui donnant un grand nombre d'aîles.

777. Il ſe préſente à ce ſujet une difficulté qui pourroit embarraſſer quelques Lecteurs, & qu'il eſt à propos d'éclaircir. En ſuppoſant la roue immobile à l'inſtant du choc, il eſt clair que dans la rigueur géométrique le nombre le plus avantageux d'aîles doit être *infini*. Or, dira-t-on, ſi le nombre des aîles devient infini, leurs extrémités formeront une circon-
Fig. 81. férence de cercle $FBGO$ (Fig. 81); & l'impulſion qui réſultera perpendiculairement contre chaque élément KN de l'arc FBG étant dirigée au centre C, ne tendra à produire aucun mouvement de rotation; d'où il paroît s'enſuivre que bien loin que la roue reçoive alors le plus grand moment poſſible d'impulſion, elle n'en recevra point du tout. Mais il faut remarquer que dans notre calcul les aîles ſont regardées comme une ſuite de plans différemment inclinés, tous dirigés au centre, & frappés par le fluide ſous différentes obliquités; que ſi par conſéquent on détruit cette hypothèſe, on détruit néceſſairement

les

les conſéquences qui en réſultent. Or la ſuppoſition que *FBG* eſt un arc de cercle, continu & compoſé d'élémens *KN* qui, loin d'être dirigés au centre *C*, ſont perpendiculaires aux raïons *CK*, eſt entièrement contraire à la précédente. Il n'eſt donc pas ſurprenant qu'on arrive à des réſultats très-différens dans les deux cas.

Concluons cependant de-là que comme les filets d'eau ſont compoſés de molécules phyſiques, ou qui ont des groſſeurs finies, & que de plus ces filets ſe gênent les uns les autres dans leurs mouvemens, les extrémités des aîles doivent toujours laiſſer entr'elles un certain intervalle qui permette au fluide d'exercer ſon action autant qu'il eſt poſſible. Le nombre d'aîles qu'il convient de donner à une roue en repos, & à plus forte raiſon à une roue en mouvement, pour ſe procurer la plus grande force qu'il eſt poſſible de la part du fluide, eſt donc toujours fini & limité. A quoi on peut ajouter qu'en multipliant le nombre des aîles, on rend la roue plus peſante, & par-là ſujette à un plus grand frottement.

778. Lorſque le mouvement de la roue eſt devenu uniforme & permanent, ſa vîteſſe eſt ordinairement très-comparable à celle du fluide; elle en eſt la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. Alors il eſt difficile de déterminer, pour un inſtant quelconque, le moment de l'impulſion de l'eau contre toutes les aîles à-la-fois, & d'en conclure le nombre le plus avantageux d'aîles. Je ne pourrai donner la

ſolution géométrique de ce problême que dans les notes. Ici on peut le réſoudre par une eſpèce de tâtonnement qui eſt ſuffiſamment exact pour la pratique. Voici en quoi il conſiſte. Après avoir fixé le raïon de la roue, la quantité dont les aîles doivent être trempées dans l'eau, & la vîteſſe qu'on veut faire prendre à un point donné de la roue, par rapport à celle du fluide, on imaginera que la roue a ſucceſſivement différens nombres d'aîles; & on déterminera, pour différentes poſitions de la même roue, les momens de l'impulſion de l'eau contre toutes les parties de ces aîles qui ſont plongées-à-la fois dans le fluide. Le nombre d'aîles qui donnera le plus grand moment *moyen* d'impulſion, ſera le plus avantageux. Il ſuffira dans cette recherche de conſidérer trois poſitions de la roue, celle où l'aîle AB (Fig. 79) eſt dans la verticale, celle où l'angle BCe moitié de l'angle BCE compris entre deux aîles voiſines, eſt diviſé en deux parties égales par la verticale, & celle où la droite Ce eſt dans la verticale. C'eſt ainſi qu'en ſuppoſant la vîteſſe du point B de la circonférence extérieure $FBGl$ égale au tiers de celle du fluide, l'enfoncement AB de la roue dans le fluide égal à la cinquième partie du raïon CB, & par conſéquent l'arc FBG d'environ 72 degrés, j'ai trouvé qu'il convient de donner 36 aîles à la roue. Si on ſuppoſe toujours la vîteſſe du point B la même, il faudra plus ou moins de 36 aîles, ſelon que l'arc FBG ſera au-deſſous ou au-deſſus de 72 degrés. Ces cal-

culs ſont longs & pénibles ; & l'expérience eſt la voie la plus ſimple & la plus expéditive pour réſoudre la queſtion.

779. La roue étant toujours verticale & garnie d'aîles rectangulaires, quelquefois au lieu de diriger ces aîles au centre, on les incline au raïon comme on le voit dans la Figure 92. Par cette diſpoſition on perd quelque choſe du choc de l'eau qui ſe fait alors très-obliquement; mais il y a des cas où cette perte eſt plus que réparée par le poids de l'eau qui gliſſe ſur les aîles & les preſſe, comme nous le verrons ci-deſſous par l'expérience. Le problême pourroit ſe réſoudre par la théorie; mais il demande des calculs aſſez longs & un peu hypothétiques. Cette raiſon me détermine à les ſupprimer.

780. Reprenons l'hypothèſe où les aîles ſont dirigées au centre, & examinons le rapport qu'il convient de mettre entre leur hauteur & leur largeur.

Il eſt évident qu'étant donnés le raïon extérieur CB de la roue & la vîteſſe du fluide, le moment de l'impulſion de l'eau contre la ſurface *donnée* d'une aîle ſera d'autant plus grand que cette impulſion agira par un plus grand bras de levier. Or ce bras de levier augmente à meſure qu'on augmente la largeur de l'aîle & qu'on diminue en conſéquence la hauteur proportionnellement, pour conſerver toujours la même ſurface. Si on avoit donc de l'eau à volonté, & qu'elle conſervât toujours la même vîteſſe, on devroit augmenter infiniment la largeur, & rendre la hauteur infiniment petite. D'après ce

principe, c'eſt un uſage avantageux de donner beaucoup de largeur aux aîles d'une roue qui trempe dans une rivière. Mais à l'égard des roues mues dans des courſiers, ou par des courans dont on eſt obligé d'économiſer l'eau & de l'employer le plus utilement qu'il eſt poſſible, la choſe demande quelques nouvelles conſidérations.

Fig. 82. 781. Soit *ABKD* (Fig. 82) la face verticale d'un réſervoir, dans laquelle eſt pratiqué le pertuis rectangulaire *MNOP*. Que *AB* repréſente le niveau de l'eau. Suppoſons qu'au pertuis *MNOP* ſoit adapté un canal ou courſier rectangulaire qui conduit l'eau contre les aîles d'une roue. Comme il faut toujours que les aîles de la roue ayent un certain jeu dans le courſier pour éviter le frottement contre ſon fond & ſes parois, nous pouvons imaginer que la partie d'une aîle, qui reçoit le choc perpendiculaire de l'eau, eſt repréſentée par le rectangle *mnop*, dont les côtés *mp*, *no*, *op* ſont parallèles reſpectivement aux côtés *MP*, *NO*, *OP*, & en ſont diſtans d'une quantité donnée. Ainſi il n'y a que l'eau qui ſort par le pertuis *mnop* qui ſoit employée à mouvoir l'aîle; celle qui ſort par les vuides rectangulaires *Mp*, *No*, *Oz*, coule en pure perte. Concevons maintenant que l'aîle *mnop* eſt transformée en une autre auſſi rectangulaire *efgh* d'égale ſurface, dont la largeur & la hauteur ſont données; & qu'en conſéquence le pertuis *MNOP* ſoit transformé en un autre *EFGH*, tel que les jeux *Ee*, *Ff*, *Hi* de la nouvelle aîle ſont les mêmes reſpectivement que ceux

Mm, *Nn*, *Pz* de la première. La quantité d'eau que le réſervoir peut fournir, étant ſuppoſée limitée & *donnée*, il eſt clair que le niveau primitif s'abbaiſſera quelque part en *ab*. Reſte à ſçavoir ſi en vertu de cette dépreſſion le moment de l'impulſion de l'eau contre l'aîle ne diminue pas. Ce qui fonde ce doute, c'eſt qu'il s'écoule d'autant plus d'eau en pure perte, que le vuide rectangulaire *Gi* a une plus grande baſe *GH*; car la charge d'eau qui lui répond eſt plus grande que celle qui répond aux vuides latéraux *Fg*, *Eh*, *Mp*, *No*. On trouvera dans les notes la ſolution géométrique & directe de ce problême. Ici contentons-nous d'indiquer la manière ſuivante d'apprécier dans chaque cas particulier, l'effet de la transformation propoſée.

782. Soit menée la verticale *TR* qui diviſe chacun des deux pertuis *MNOP*, *EFGH* en deux parties parfaitement égales & ſemblables.

Suppoſons
- *TS* . . . . = h
- *Sm* . . . . = b
- *Sr* . . . . = c
- *Mm* . . . . = d
- *rR* . . . . = e
- *tV* . . . . = h'
- *Ve* . . . . = p
- *Vr* . . . . = q
- le temps de l'écoulement, ... = t
- le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur donnée a, = θ.

On aura $TR = h + c + e$, quantité que je nomme H, pour abréger; $SM = b + d = f$, $tR = h' + q + e$, $VE = p + d$. Comme l'aîle $efgh$ doit être égale à l'aîle $mnop$, on aura d'abord l'équation $pq = bc$. De plus (250) la dépenſe que fait le pertuis $SMPR$, pendant le temps t, étant exprimée par $\frac{4tf\sqrt{a}.(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}})}{3\theta}$, & la dépenſe que fait le pertuis $VEHR$ étant exprimée par

$$\frac{4t(p+d)\sqrt{a}.\left((h'+q+e)^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}\right)}{3\theta};$$ ſi l'on égale entr'elles ces deux dépenſes, on aura cette ſeconde équation

$$f(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}) = (p+d)\left((h'+q+e)^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}\right).$$

D'où l'on voit que connoiſſant l'une des trois quantités h', p, q, les ſeules qui peuvent être inconnues, on parviendra à les connoître toutes trois. Lorſque p ou q eſt donnée, & que par conſéquent h' eſt une inconnue, l'équation finale eſt du quatrième degré. Si on ſe donne h', on trouvera p & q par des équations du cinquième degré. Toutes ces équations ſe réſoudront dans la pratique par les méthodes d'approximation.

783. Ayant déterminé, au moyen des opérations qu'on vient d'indiquer, les lignes tV, Vr, Ve, il ſera facile de comparer le moment de l'impulſion de l'eau contre l'aîle $mnop$, au moment de l'im-

pulſion contre l'aîle *efgh*, & de juger ainſi laquelle de ces deux aîles eſt la plus avantageuſe. Car ſoient *X* le centre d'impreſſion de l'aîle *mnop*, c'eſt-à-dire, le point auquel répondroit la hauteur *moyenne* du fluide, ſi ce fluide ſortoit par l'orifice *mnop*, *Z* le centre d'impreſſion de l'aîle *efgh*, point déterminé par la même loi que *X*. Suppoſons de plus que *C* ſoit le centre de la roue, *Cr* ſon raïon extérieur ; & pour plus de ſimplicité, imaginons que chaque aîle eſt en repos à l'inſtant qu'elle eſt frappée par le fluide. Maintenant, l'impulſion perpendiculaire contre une ſurface plane étant comme le produit de cette ſurface par le quarré de la vîteſſe du fluide; ou ce qui revient au même, comme le produit de la ſurface par la hauteur moyenne du fluide: le moment de l'impulſion de l'eau contre l'aîle *mnop* ſera repréſenté par $mnop \times TX \times CX$, & le moment de l'impulſion contre l'aîle *efgh* ſera repréſenté par $efgh \times tZ \times CZ$. Ainſi on aura le rapport de ces deux momens, rapport qui mettra à portée de prononcer ſi on gagne quelque choſe du côté de la force, à transformer l'aîle *mnop* en l'aîle *efgh*.

784. Je paſſe à l'examen de la vîteſſe que la roue doit prendre par rapport à celle du fluide, pour que la machine produiſe le plus grand effet qu'il eſt poſſible.

L'effet de la machine eſt la quantité de mouvement imprimé au poids Q qu'elle enlève uniformément. Je fais abſtraction des réſiſtances, ou du moins

je les comprends dans le poids Q. Si ce poids étant donné sa vîtesse v est très-petite, la quantité de mouvement $Q.v$ sera très-petite. Si au contraire v étant donnée, Q est très-petit, la quantité de mouvement sera encore très-petite. Ainsi, pour qu'une machine mue par une force déterminée, reçoive la plus grande quantité de mouvement qu'il est possible, & produise par conséquent le plus grand effet qu'elle peut produire, il ne faut pas se proposer pour unique but, d'enlever le plus grand fardeau qu'il est possible, ni de procurer une grande vîtesse à la machine ; mais il faut tellement combiner le fardeau enlevé, avec sa vîtesse, que leur produit Qv soit le plus grand qu'il est possible, ou un *maximum*.

785. Lorsque tous les filets d'eau se meuvent avec la même vîtesse, & que la roue est en repos au moment qu'elle est frappée, la somme des momens d'impulsion, ou le moment unique qui résulte de toutes les impulsions contre toutes les parties des aîles plongées dans l'eau, est toujours égal au moment que recevroit une surface plane & verticale, de même largeur que les aîles, & plongée dans l'eau à même profondeur (772). Le centre d'impression de cette surface est le même que son centre de gravité, puisque toutes les molécules d'eau sont supposées la frapper avec des vîtesses égales & parallèles. Il n'en est pas de même pour une roue qui tourne déja lorsqu'elle est frappée par le fluide. Les parties d'une même aîle ayant différentes vîtesses, selon qu'elles

ſont plus ou moins éloignées de l'axe, il eſt clair que pour avoir le moment total d'impulſion, il faut déterminer en particulier le moment de chaque impulſion élémentaire, & prendre enſuite la ſomme de tous ces momens. Alors la vîteſſe la plus avantageuſe de la roue a pour un de ſes élémens le nombre des aîles, comme on le verra dans les notes.

786. Ici je ſuppoſe, ſuivant l'uſage ordinaire, qu'à la place des aîles plongées dans l'eau on ſubſtitue une ſurface plane & verticale qui ſoit frappée perpendiculairement par le fluide, & qui avant ce choc ait déja une vîteſſe uniforme & permanente. Nommons A cette ſurface, u la vîteſſe primitive & uniforme de ſon centre d'impreſſion, b la diſtance de ce centre à celui de la roue, V la vîteſſe du fluide, Q le fardeau enlevé, v ſa vîteſſe, c ſon bras de levier; & de plus ſuppoſons que l'impulſion perpendiculaire du fluide contre une ſurface B en repos, ſoit égale à un poids connu F. Il eſt évident (727) que l'impulſion reçue par la ſurface A ſera repréſentée par $F \times \frac{A \times (V - u)^2}{B \times V^2}$. Donc, à cauſe de l'équilibre qu'il y a à chaque inſtant entre cette impulſion & l'action que la peſanteur exerce ſur le poids Q, on aura $F \times \frac{A \times (V - u)^2}{B \times V^2} \times b = Q \times c$. Multipliant le ſecond membre par v, & le premier par $\frac{cu}{b}$ quantité qui eſt égale à v, on trouvera $Qv = \frac{F \times A \times (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$. Or, le produit

Qv doit être un *maximum* (784). Donc, $\frac{F \times A \times (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$ en ſera auſſi un; & comme le facteur $\frac{F \times A}{B \times V^2}$ eſt conſtant & donné, il eſt clair que $\frac{F \times A \times (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$ ſera un *maximum*, lorſque $(V - u)^2 \times u$ en ſera un. Il eſt donc queſtion de ſçavoir pour cela quelle doit être la vîteſſe u, la vîteſſe V étant donnée.

Fig. 83. 787. Soit priſe une droite AB (Fig. 83) $= V$, la partie $BC = u$. On aura $(V - u)^2 \times u = \overline{AC}^2 \times BC =$ *maximum*. Or en-deçà & en-delà du *maximum*, les quantités de même eſpèce que lui ſont égales; donc en ſuppoſant que le point C ſoit placé entre les points M & N infiniment voiſins, on aura $\overline{AM}^2 \times BM = \overline{AN}^2 \times BN$, ou $\overline{AM}^2 \times BM = (AM + MN)^2 \times (BM - MN)$, ou $2\,AM \times MN \times BM + \overline{MN}^2 \times BM - \overline{AM}^2 \times MN - 2\,AM \times MN \times MN - \overline{MN}^3 = 0$. Diviſant tout par MN, & négligeant enſuite les termes qui contiendront encore MN comme infiniment petits par rapport aux autres, on trouvera $2\,AM \times BM - \overline{AM}^2 = 0$, ou $BM = \frac{AM}{2}$, ou en mettant à la place des lignes BM, AM les lignes BC, AC qui en diffèrent infiniment peu, $BC = \frac{AC}{2}$, ou bien enfin

$BC = \frac{AB}{3}$, ce qui est la même chose que $u = \frac{V}{3}$. Ainsi *pour que l'effet de la machine soit un* maximum, *il faut que la vîtesse* u *du centre d'impression de la surface* A *soit le tiers de la vîtesse du courant.*

788. Pour connoître la valeur absolue du *maximum*, il faudra substituer dans l'équation $Qv = \frac{F \times A \times (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}$, à la place de u la valeur $\frac{V}{3}$ que nous venons de trouver. Alors on aura $Qv = \frac{4 F \times A \times V}{27 B}$, ou en faisant la surface donnée $B = A$, $Qv = \frac{4 F \times V}{27}$. Or, en nommant H la hauteur dûe à la vîtesse V du fluide, il ne s'en faut pas beaucoup (748) qu'on n'ait $F = 2 A . H$. On aura donc $Qv = \frac{8 A . H}{27} \times V$. D'où l'on voit que quand la machine produit son plus grand effet, elle peut imprimer à un poids d'eau représenté par $\frac{8 . A . H}{27}$, la vîtesse V du fluide; ou ce qui revient au même, elle peut donner à un poids exprimé par $A . H$ les $\frac{8}{27}$ de la vîtesse du courant.

789. Dans tout ce que nous avons dit jusqu'ici, il n'a été question que de roues plongées verticalement dans un courant; mais il est évident que les mêmes résultats ont également lieu pour une roue

horiſontale qui a les aîles rectangulaires, & qui eſt mue par un fluide dont la direction eſt dans le plan de cette même roue. Quelquefois on employe des roues de cette eſpèce. Mais ordinairement la direction du courant eſt oblique par rapport au plan de la roue toujours ſuppoſée horiſontale; & on donne une certaine inclinaiſon aux aîles, par rapport au même plan.

Fig. 84. 790. La Figure 84 repréſente une roue horiſontale *BHKL* portée par un arbre vertical *CD* Les aîles *MNOP* ſont inclinées au plan de cette roue. Elle eſt mue par un courant *VQ* qui tombe d'une certaine hauteur, & qui frappe chaque aîle à meſure que ſa ligne de milieu *AB* ſe trouve dans l'horiſontale *CB* perpendiculaire au plan vertical qui paſſeroit par la direction *VQ* du canal. Les deux angles *VQe*, *VQf* ſont les angles de ſuite formés par le plan de l'aîle *MNOP* avec la direction du courant.

791. On voit aſſez qu'il eſt à propos de donner un grand nombre d'aîles à ces ſortes de roues, afin que les chocs du fluide ſe ſuccèdent les uns aux autres, ſans interruption. Car la peſanteur du fardeau que la roue eſt cenſée enlever, travaille continuellement en ſens contraire; & les coups que cette force donne, doivent être contrebalancés par ceux du fluide. Il faut éviter néanmoins de multiplier les aîles au point de rendre la roue lourde.

792. La direction du fluide & la vîteſſe avec laquelle la roue tourne étant ſuppoſées données, on voit par l'article 738, que parmi toutes les inclinai-

ſons qu'on peut donner à l'aîle par rapport à la direction du fluide, ou par rapport au plan de la roue, il y en a une plus avantageuſe que toutes les autres, pour imprimer de la force à la roue. Cette poſition eſt facile à déterminer par l'article 739. En effet, ſoient *VQH* (Fig. 85) la direction du fluide, Fig. 85.
QH l'expreſſion de ſa vîteſſe, *QF* l'expreſſion de la vîteſſe horiſontale avec laquelle la roue tourne. Qu'on décompoſe la vîteſſe *QH* en deux autres *QF*, *QG*, dont la première eſt la même que celle de la roue. Du point *Q*, comme centre, avec un raïon *QA* pris à volonté pour ſinus total, ſoit décrit l'arc indéfini *AMX* qui coupe en *M* le plan *fe* prolongé lorſqu'il eſt néceſſaire ; & du point *M* ſoit mené le ſinus *MB* de l'angle *MQA*. En nommant *A* l'aire du plan *ef*, *V* la vîteſſe *QH* du fluide, *F* l'impulſion perpendiculaire que le fluide exerceroit contre un plan *B* en repos ; il réſultera (728) perpendiculairement à *ef* une impulſion repréſentée par la quantité $\frac{F \times A \times \overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2}{B \times \overline{QA}^2 \times V^2}$. Soit priſe la droite *QR* perpendiculaire à *ef* pour repréſenter cette impulſion; & décompoſons la même force en deux autres *QS*, *QT*, dont la première tombe ſur *QF*, la ſeconde lui eſt perpendiculaire. Il eſt clair que la force *QT* eſt détruite, & que la force *QS* eſt la ſeule qui tende à faire tourner la roue. Or, ſi du point *M* on abaiſſe ſur *FQ* prolongée la perpendiculaire *MN*, on aura, comme il eſt évident, force *QS* = force

$QR \times \frac{MN}{QM}$ = force $QR \times \frac{MN}{QA}$ = $\frac{F \times A \times \overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2 \times MN}{B \times \overline{QA}^3 \times V^2}$. Cette force fait équilibre à chaque instant avec le fardeau Q' (Fig. 84). Donc, en nommant b le raïon CQ de la roue, c le bras de levier du fardeau, on aura $\frac{F \times A \times \overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2 \times MN}{B \times \overline{QA}^3 \times V^2}$ $\times b =$ Q' $\times c$. Nommons encore v la vîtesse du fardeau Q', u la vîtesse QF, & considérons que $v = \frac{cu}{b}$. On trouvera

$$\text{(A)} \quad Q'v = \frac{F \times A \times \overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2 \times MN \times u}{B \times \overline{QA}^3 \times V^2};$$

quantité qui doit être un *maximum*. Dans cette quantité tout est constant & donné, à l'exception des lignes MB, MN. La question se réduit donc à faire ensorte que $\overline{MB}^2 \times MN$ soit un *maximum*. Or il faut pour cela (741) prolonger AQ de la quantité $QK = \frac{AQ}{3}$, mener KX parallèle à QN, tirer le raïon QX, & partager l'angle AQX en deux parties égales par la droite QM; le plan ef doit être placé sur cette ligne.

Il est aisé de calculer l'angle AQX, & par conséquent aussi sa moitié AQM, par les règles de la Trigonométrie. Car l'angle VQF que fait la direc-

tion du fluide avec l'horiſontale étant donné, on connoît dans le triangle *FQH*, l'angle *FQH*, & les deux côtés *QH*, *QF* qui le comprennent. On parviendra donc à connoître l'angle *FHQ* ou ſon égal *HQG*. Donc on connoîtra l'angle *GQF* & ſon ſupplément *GQN*. Dans le triangle *QKX*, on connoît les côtés *QK*, *QX*, & l'angle $QKX = GQN$; ainſi on parviendra à connoître l'angle aigu *QXK* ou ſon égal *XQN*. Donc enfin on connoîtra l'angle *AQX*, ſomme des deux angles calculés *GQN*, *XQN*.

Après avoir ainſi déterminé dans chaque cas particulier les lignes *MB*, *MN*, on ſubſtituera leurs valeurs dans l'équation (A); & on connoîtra la valeur abſolue du *maximum*, c'eſt-à-dire, l'effet *Qv* de la machine, lorſqu'il eſt le plus grand qu'il eſt poſſible.

793. Si les angles que forme la direction du fluide avec le plan de l'aîle & avec celui de la roue ſont donnés, & qu'il faille trouver la vîteſſe que la roue doit prendre, pour que l'effet de la machine ſoit un *maximum*, la queſtion ſe réſoudra par les mêmes principes. Car faiſant d'abord la même conſtruction (Fig. 86) que nous avons faite dans l'article précédent pour parvenir à l'équation (A), nous trouverons cette même équation; & nous obſerverons maintenant que tout y eſt donné & conſtant, à l'exception des quantités *QG*, *MB*, *u*. Le problême ſe réduit donc à faire enſorte que $\overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2 \times u$ ſoit un *maximum*. Des points *A* & *G* ſoient abaiſſées les Fig. 86.

perpendiculaires AI, GZ, GP ſur les droites QM, QH; & nommons m le ſinus de l'angle GHP qui eſt donné, le ſinus total étant toujours QA. On aura $QG : GZ :: QA : AI$ ou MB, & par conſéquent $\overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2 = \overline{QA}^2 \times \overline{GZ}^2$. De plus, GH ou $u = GP \times \frac{QA}{m}$. Donc $\overline{QG}^2 \times \overline{MB}^2 \times u$ $= \frac{\overline{QA}^3}{m} \times \overline{GZ}^2 \times GP = maximum$. Donc, à cauſe que $\frac{\overline{QA}^3}{m}$ eſt une quantité conſtante, il faut que $\overline{GZ}^2 \times GP = maximum$. Comme le point G doit toujours être placé dans la même direction HG, & qu'en prolongeant HG juſqu'à la rencontre de QM auſſi prolongée le triangle HQY eſt donné, on voit Fig. 87. qu'il s'agit de trouver ſur la baſe HY (Fig. 87) d'un triangle donné HQY un point G tel que menant les perpendiculaires GP, GZ ſur les côtés QH, QY, le produit $\overline{GZ}^2 \times GP$ ſoit un *maximum*.

794. Du ſommet Q, ſoit abaiſſée la perpendiculaire QO ſur la baſe HY. On aura, à cauſe des triangles ſemblables QOY, GZY, $GZ = GY \times \frac{QO}{QY}$; & à cauſe des triangles ſemblables QOH, GPH, $GP = GH \times \frac{QO}{QH}$. Donc, $\overline{GZ}^2 \times GP$ $= \overline{GY}^2 \times GH \times \frac{\overline{QO}^3}{\overline{QY}^2 \times QH}$. Donc, à cauſe du facteur

teur conſtant $\frac{\overline{QO}^3}{\overline{QY}^2 \times QH}$, on voit qu'il n'eſt queſtion que de couper une droite donnée HY en un point G qui ſoit tel que le produit $\overline{GY}^2 \times GH =$ *maximum*. Or on trouve par la méme méthode que nous avons employée (787) qu'il faut pour cela que la partie HG ſoit le tiers de la baſe entière HY du triangle HQY. En revenant donc à la Figure 86, nous voyons que ſi l'on mène par le point H & parallèlement à la direction donnée QF de la vîteſſe de la roue, la droite HY qui rencontre en Y le prolongement de l'aîle fe; & qu'ayant pris $HG = \frac{HY}{3}$ & ayant mené la droite QG, on achève le parallélogramme $QGHF$; la vîteſſe la plus avantageuſe de la roue ſera repréſentée par QF.

Rien n'eſt plus facile que de calculer la vîteſſe QF ou HG, dans chaque cas particulier. Mettant enſuite cette valeur dans l'équation générale (A) on connoîtra le plus grand effet Qv de la machine.

795. Dans la pratique, les aîles n'ont pas pour l'ordinaire la figure exactement plane, comme elle l'eſt dans la Figure 84; mais on les courbe & elles forment des eſpèces de cuilleres (Fig. 88). Par le Fig. 88.
moyen de cette figure, après avoir été frappées par l'eau elles en conſervent, du moins pendant quelque temps, une partie qui agit par ſon poids, & qui tend à augmenter la vîteſſe & la force de la

roue. Les résultats des calculs précédens doivent donc être un peu modifiés relativement à cette circonstance.

Il y a dans plusieurs Provinces de France, surtout en Dauphiné & en Provence, des moulins qui sont mus par des roues de ce genre. On voit que l'arbre *K* porte la meule. Nous représentons l'effet de cette meule par le produit d'un certain poids Q multiplié par la vîtesse avec laquelle il monte.

796. On peut encore rapporter aux roues mues par le choc de l'eau, une autre espèce de roues fort usitées en Guyenne & en Languedoc pour faire tourner des moulins. Ces roues ont la forme d'un cone renversé dont l'axe est vertical, & qui est garni à sa surface d'aîles posées obliquement, ou en
Fig. 89. spirale. Voyez la Figure 89. L'eau en tombant sur ces aîles oblige le cone tronqué à tourner sur son axe. On place ces roues dans des cuves de maçonnerie construites exprès pour cet usage.

Il est difficile de calculer en rigueur les effets de ces sortes de roues ; mais on pourra s'en faire une idée suffisante dans la pratique, au moyen de la théorie que nous avons donnée pour les autres espèces.

797. Il a paru depuis peu, parmi les Mémoires de l'Académie, des recherches très-ingénieuses sur les roues hydrauliques, dans lesquelles l'Auteur emploie une théorie différente de la précédente. Il suppose que les aîles d'une roue reçoivent tout l'effet de l'eau,

& ne laiſſent échapper aucune partie de ce fluide, qu'elles ne lui ayent ôté l'excès de ſa vîteſſe ſur la leur. Le choc du fluide eſt donc ainſi comparé à celui d'un corps dur en mouvement qui va choquer un corps dur en repos. D'après cette ſuppoſition, l'Auteur trouve que pour le plus grand effet poſſible de la machine, la vîteſſe de la roue doit être la moitié, & non pas le tiers comme on le dit ordinairement, de celle du fluide. Mais cette théorie n'eſt pas applicable aux roues plongées dans des rivières où le fluide n'étant pas contenu de part & d'autre peut s'échapper, & n'eſt pas néceſſité à perdre la moitié de ſa vîteſſe contre les aîles. Elle ſouffre même des reſtrictions ſenſibles pour les roues mues dans des courſiers. Car il ſe perd une partie du fluide par les vuides qu'il faut néceſſairement laiſſer entre l'intérieur du courſier & les extrémités des aîles, pour éviter le frottement. De plus, en ſuppoſant que ces vuides ſoient donnés, la théorie en queſtion conduit aux mêmes rèſultats, quelque ſoit le nombre des aîles; ou du moins elle ne paroît pas propre à déterminer s'il y a un nombre d'aîles plus avantageux qu'un autre. Cependant nous allons voir par la voie de l'expérience que le nombre des aîles n'eſt point du tout une choſe indifférente, relativement à l'effet de la machine.

SECTION II.

Expériences & Réflexions sur le mouvement des roues mues par le choc de l'eau.

Fig. 90. 798. La Figure 90 repréſente une roue *AGFH* qui avoit d'abord 48 aîles, & qu'on a réduites ſucceſſivement à 24 & à 12. Toutes ces aîles ſont dirigées au centre *C*. Elles ont 5 pouces juſte de largeur, c'eſt-à-dire, ſuivant la dimenſion perpendiculaire au plan de la roue; & 4 à 5 pouces de hauteur, c'eſt-à-dire, ſuivant la dimenſion dirigée au centre. Elles trempent dans le canal dont il a été parlé (Chap. VII, Sect. I), & qui eſt repréſenté dans la Figure 47. La roue tourne librement, & il s'en faut d'environ $\frac{1}{2}$ ligne que les extrémités des aîles n'atteignent le fond & les parois du canal. L'arbre de la roue, qui eſt horiſontal, a une gorge cylindrique pour recevoir les rangs parallèles d'une corde *COS* qui s'enveloppe autour d'elle, & qui, au moyen de la poulie *O* de renvoi, fait monter le poids Q, lorſque le courant *XYTZ* frappe les aîles. Le diamètre extérieur *BK* de la roue eſt de 3 pieds 1 pouce 10 lignes; le diamètre à nud de la gorge cylindrique qui reçoit la corde eſt de 2 pouces; le diamètre des tourillons placés aux extrémités de l'arbre eſt de 2 $\frac{1}{2}$ lignes; la poulie *O* de renvoi a 3 pouces 8 lignes de diamètre, & celui de ſes tourillons eſt 2 $\frac{2}{3}$ lignes. Le diamètre de la corde eſt de 2 lignes.

L'endroit où la machine eſt placée, eſt diſtant d'environ 50 pieds du réſervoir *ADCB* (Fig. 47). La vîteſſe du courant a été préalablement déterminée par les moyens expliqués au long dans le Chapitre VII qu'on doit avoir préſent à l'eſprit, pour pouvoir entendre ce qui ſuit.

J'avertis une foïs pour toutes, qu'ici & dans la ſuite je ne commence à compter le nombre de tours que fait la roue pendant le nombre de ſecondes marquées dans l'avant dernière colonne de chaque table, que quand le mouvement aſcenſionnel du fardeau Q eſt devenu uniforme; ce qui arrive toujours, lorſque la roue a fait 4 à 5 tours.

EXPÉRIENCES I, II, III,.... VI.

	Nombre des aîles de la roue.	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre des tours de la roue.
799. La pale eſt élevée de 1 pouce; & la vîteſſe de l'eau dans le canal, eſt de 300 pieds en 33 ſecondes, comme dans l'article 636.	48	12	60	33 $\frac{1}{4}$
	48	16	60	28 $\frac{1}{2}$
	24	12	60	29
	24	16	60	25 $\frac{1}{2}$
	12	12	60	25 $\frac{1}{2}$
	12	16	60	19 $\frac{1}{4}$

EXPÉRIENCES VII, VIII,.... XII.

	Nombre des aîles de la roue.	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre des tours de la roue.
800. La pale est élevée de 1 pouce, & la vîtesse de l'eau dans le canal, est de 300 pieds en 30 secondes, comme dans l'article 634.	48	12	48	34
	48	16	48	$31\frac{1}{4}$
	24	12	48	$30\frac{1}{3}$
	24	16	48	$28\frac{1}{2}$
	12	12	48	25
	12	16	48	23

RÉFLEXIONS.

801. Le fardeau enlevé étant le même, la roue tourne plus vîte lorſqu'elle a 48 aîles, que lorſqu'elle en a 24; & plus vîte lorſqu'elle en a 24, que lorſqu'elle en a 12. Ainſi dans tous les cas pareils à nos expériences, il ſera avantageux de donner au moins 48 aîles à la roue, ſi toutefois elle peut les porter ſans devenir trop peſante, & ſans que d'un autre côté les trous qu'il faut percer dans l'anneau pour recevoir les chevilles deſtinées à porter les aîles, n'affoibliſſent trop ce même anneau, & n'enlèvent à l'aſſemblage la ſolidité dont il a beſoin. Voyons donc quelle eſt la valeur de l'arc *MBN* qui trempe dans

l'eau. A 50 pieds de diſtance au réſervoir, endroit où la roue eſt placée, l'eau s'éleve au-deſſus du fond du canal, d'environ 13 à 14 lignes; & la plus grande profondeur à laquelle les aîles s'enfoncent, eſt d'environ 13 lignes. D'après ces données & la connoiſſance du raïon de la roue, je trouve que l'arc *MBN* eſt de 24 degrés 54 minutes. Dans les grandes roues qui ont environ 20 pieds de diamètre, & qui ſont mues par un courant rapide, l'arc plongé dans l'eau n'excède guères 25 à 30 degrés; & on ne leur donne pas ordinairement plus de 40 aîles. Si on leur en donnoit davantage, elles produiroient un plus grand effet. La théorie & l'expérience ſont d'accord ſur ce point.

802. C'eſt un uſage reçu de donner un petit nombre d'aîles aux roues qui trempent dans les rivières; & cela pour empêcher que les aîles ne ſe couvrent les unes les autres, & pour que chacune puiſſe recevoir le choc de l'eau. L'expérience va nous indiquer ce qu'on doit penſer de cette pratique.

La roue dont je me ſuis ſervi ici (Fig. 91 & 92) eſt faite autrement que la précédente. *BGFHhbgf* eſt l'élévation commune de deux couronnes de fer dont la largeur *Bb* eſt de 9 lignes, & l'épaiſſeur de 1 ligne. Les aîles ſont de tole; elles ont environ $\frac{1}{2}$ ligne d'épaiſſeur. L'extrémité exterieure *B* de chacune d'elles eſt portée par une petite cheville de fer qui s'aſſemble dans les deux couronnes, tandis que l'autre extrémité eſt portée par deux tiges *AR* Fig. 91. & 92.

de fer qui ſont attachées en *R* à la roue *K* mobile autour du centre C. Par ce moyen, on peut ou diriger les aîles au centre, ou leur donner telle inclinaiſon qu'on veut par rapport au raïon. On peut auſſi, quand on veut, ôter & remettre une partie des aîles. A l'égard des dimenſions, le diamètre extérieur *BF* eſt de 3 pieds; la largeur des aîles eſt de 5 pouces; leur hauteur *BA* de 6 pouces; le diamètre à nud de la bobine cylindrique ſur laquelle s'enveloppe la corde *COQ* qui porte le poids Q, eſt de 2 pouces 6 lignes; celui des tourillons de l'arbre, de 3 lignes; le diamètre de la poulie, de 3 pouces 8 lignes; & celui de ſes tourillons, de $2\frac{2}{3}$ lignes. Le diamètre de la corde eſt de 2 lignes, enſorte que le bras de levier du poids Q eſt de 1 pouce 4 lignes à très-peu-près. Comme la roue ne fait pas toujours un nombre entier de tours pendant un certain nombre de ſecondes; pour pouvoir meſurer facilement les fractions de tours, j'ai fait garnir encore l'arbre, d'une petite roue à dents, qui à l'aide d'un cliquet ſert à arrêter la machine au moment précis qu'on veut. Cette machine peſe en tout 44 livres, c'eſt-à-dire, en y comprenant le poids de toutes les parties de la roue principale, & celui de la roue d'arrêt.

La même machine eſt, aux dimenſions & à d'autres légères différences près, celle dont M. de Parcieux s'eſt ſervi (Mém. de l'Acad. an. 1759). Elle a l'avantage de pouvoir être employée à des expériences de pluſieurs eſpèces.

Le courant sur lequel les expériences de la table suivante ont été faites, est contenu entre deux murs verticaux, parallèles & distans l'un de l'autre d'environ 12 à 13 pieds. Le fond de ce canal est un radier assez uni ; & la profondeur totale de l'eau est d'environ 7 à 8 pouces. Cette profondeur a toujours été la même pour la même suite d'expériences. Je dirai ci-dessous comment j'ai déterminé la vîtesse du courant. Le bâtis de la machine est porté par de forts madriers qui forment une espèce de pont sur le ruisseau ; & il n'y a point d'obstacle qui trouble les effets de la percussion du fluide contre les aîles de la roue.

Expériences XIII, XIV, XV, XVI.

Fig. 91.

	Nombre des aîles.	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
803. Les aîles sont plongées dans l'eau, de 4 pouces, suivant la verticale, (Fig. 91).	48	24	60	$27\frac{10}{48}$
	24	24	60	$27\frac{7}{48}$
	24	40	40	$15\frac{28}{48}$
	12	40	40	$13\frac{15}{48}$

RÉFLEXION.

804. La roue enleve le même fardeau avec une vîteſſe ſenſiblement plus grande lorſqu'elle a 24 aîles, que lorſqu'elle en a 12 ſeulement. Mais elle ne marche guères plus vîte lorſqu'elle a 48 aîles, que lorſqu'elle en a 24. L'arc *MBN* enfoncé dans l'eau eſt de 77 degrés 53 minutes. Il eſt donc certain que dans les cas pareils à celui-ci, il convient de donner au moins 24 aîles à la roue. On pourroit lui en donner moins, ſi l'enfoncement dans l'eau étoit plus conſidérable. Dans la pratique on donne pour l'ordinaire 8 à 10 aîles, quelquefois moins, aux roues de moulin placées ſur des rivières. Ce nombre eſt trop petit; & les roues dont il s'agit, marcheroient mieux ſi elles avoient 12 à 18 aîles.

805. Nous avons déterminé par la théorie (787) la vîteſſe que la roue doit prendre par rapport à celle du courant, pour que la machine produiſe le plus grand effet qu'il eſt poſſible. Conſultons là-deſſus l'expérience.

Les expériences qui compoſent la première des deux tables ſuivantes ont été faites ſur le canal de la Figure 47. Celles de la ſeconde Table, ſur le courant dont on a fait la deſcription à la fin de l'article 802. Je me ſuis ſervi dans les deux cas de la roue repréſentée par la Figure 91; mais dans le premier, cette roue a 48 aîles; dans le ſecond, elle en a ſeulement 24.

EXPÉRIENCES XVII, XVIII, ... XXVIII.

806. La pale est élevée de deux pouces ; & la vîtesse de l'eau dans le canal, est de 300 pieds en 27 secondes, comme dans l'article 637.

Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
$30\frac{1}{2}$	40	$22\frac{12}{48}$
31	40	$22\frac{4}{48}$
$31\frac{1}{2}$	40	$21\frac{42}{48}$
32	40	$21\frac{32}{48}$
$32\frac{1}{2}$	40	$21\frac{20}{48}$
33	40	$21\frac{8}{48}$
$33\frac{1}{2}$	40	$20\frac{44}{48}$
34	40	$20\frac{32}{48}$
$34\frac{1}{2}$	40	$20\frac{21}{48}$
35	40	$19\frac{44}{48}$
$35\frac{1}{2}$	40	$19\frac{15}{48}$
36	40	$18\frac{28}{48}$

RÉFLEXIONS.

807. Les différens fardeaux enlevés ayant le même bras de levier, & se mouvant pendant le même temps, il est clair que leurs vîtesses sont entr'elles comme les nombres de tours de la roue, qui composent la quatrième colonne de la table. Ainsi en négligeant l'effort que l'eau employe pour vaincre le frotte-

ment & la résistance de l'air, l'effet de la machine sera le plus grand qu'il est possible, lorsque le produit du fardeau enlevé, par le nombre correspondant de tours de la roue, sera le plus grand qu'il est possible. Or, on trouve que le plus grand de ces sortes de produits est celui qui répond à $34\frac{1}{2}$ livres. L'effet de la machine est donc un *maximum*, lorsque la roue fait $20\frac{7}{16}$ tours en 40 secondes. Il ne s'agit plus que de comparer sa vîtesse à celle de l'eau dans le canal.

808. En prenant 40 secondes pour la durée commune des mouvemens de l'eau & de la roue, on trouvera,

1°. Que l'eau parcourant 300 pieds en 27 secondes, elle parcourt environ 5334 pouces en 40 secondes.

2°. Que la roue ayant 36 pouces de diamètre (802), chaque point de sa circonférence parcourt, en 40 secondes, un nombre de pouces, exprimé par $36 \times \frac{355}{113} \times (20 + \frac{7}{16})$, c'est-à-dire, environ 2311 pouces. La fraction $\frac{355}{113}$ est le rapport de la circonférence au diamètre.

Ainsi la vîtesse de l'eau dans le canal, est à la vîtesse de la circonférence extérieure de la roue, comme 5334 est à 2311, environ.

Le diamètre de la circonférence décrite par le centre d'impression, est d'environ 34 pouces; & par conséquent la vîtesse de ce centre est d'environ 2183 pouces en 40 secondes. La vîtesse de l'eau, est donc à la vîtesse du centre d'impression, comme 5334 est à 2183 à-peu-près. Ce rapport ne diffère pas beaucoup de celui de 5 à 2. On voit que la vîtesse du centre d'impression des aîles est au-dessus du

tiers & au-dessous de la moitié de la vîtesse du courant.

809. Mais ce rapport des vîtesses demeurera-t-il le même, si l'on a égard aux résistances ? La question peut être réduite à ceci. On a deux quantités semblables & consécutives $M.v$, $N.v'$, qui expriment chacune le produit d'un fardeau, par sa vîtesse; on suppose que $M.v$ soit un *maximum*, & par conséquent $M.v > N.v'$. Maintenant, pour tenir compte des résistances, les poids M & N doivent être censés augmentés chacun d'une certaine quantité. Supposons donc que M devienne $M + m$, & que N devienne $N + n$. On demande si la même vîtesse v qui rend $M.v$ un *maximum*, rendra aussi $M.v + m.v$ un *maximum*, ou si l'on aura $M.v + m.v > N.v' + n.v'$? Il est évident qu'en général cela peut être ou n'être pas, suivant le rapport que les poids m & n ont entr'eux. Mais ici il est probable que les forces $m.v$ & $n.v$ des résistances sont entr'elles, du moins sensiblement, comme les forces $M.v$ & $N.v'$. On a donc, dans cette hypothèse, $m.v : n.v' :: M.v : N.v'$. D'où l'on tire $M.v + m.v : N.v' + n.v' :: M.v : N.v'$; donc, à cause de $M.v > N.v'$, on aura aussi $M.v + m.v > N.v' + n.v'$. Quoique ce résultat ne soit pas fondé sur une démonstration, je crois qu'on ne peut guères se tromper en l'adoptant dans la pratique. Ainsi je conclus que lorsqu'une roue garnie de 48 aîles ou environ, tourne dans un coursier, & qu'elle n'est pas plongée bien profondément dans l'eau, sa circonférence doit prendre environ les deux cinquièmes

de la vîteſſe du courant, pour que la machine produiſe le plus grand effet qu'il eſt poſſible.

EXPÉRIENCES XXIX,..... XLV

	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
810. La roue tourne ſur le courant de l'article 802. Elle a 24 aîles qui ſont plongées dans l'eau, de 4 pouces, ſuivant la verticale.	30	40	17 $\frac{22}{48}$
	35	40	16 $\frac{25}{48}$
	40	40	15 $\frac{28}{48}$
	45	40	14 $\frac{31}{48}$
	50	40	13 $\frac{34}{48}$
	55	40	12 $\frac{37}{48}$
	56	40	12 $\frac{28}{48}$
	57	40	12 $\frac{19}{48}$
	58	40	12 $\frac{10}{48}$
	59	40	12 $\frac{1}{48}$
	60	40	11 $\frac{40}{48}$
	61	40	11 $\frac{30}{48}$
	62	40	11 $\frac{19}{48}$
	63	40	11 $\frac{7}{48}$
	64	40	10 $\frac{41}{48}$
	65	40	10 $\frac{25}{48}$
	66	40	10 $\frac{5}{48}$

Réflexion.

811. Pour meſurer la vîteſſe de l'eau, je me ſuis ſervi d'un moulinet très-léger, placé à côté de la roue. Il portoit ſix aîlettes qui trempoient dans l'eau d'environ 4 lignes, & qui prenoient ſenſiblement toute la vîteſſe du courant. Par-là j'ai trouvé que la vîteſſe *moyenne* de l'eau eſt d'environ 2740 pouces, en 40 ſecondes.

En multipliant chaque fardeau enlevé, par le nombre correſpondant de tours de la roue, on trouvera que le plus grand de ces produits répond à 60 livres. D'où il ſuit que dans le cas du plus grand effet, la vîteſſe de la circonférence de la roue eſt de 1338 pouces en 40 ſecondes, & que la vîteſſe du centre d'impreſſion eſt de 1189 pouces, pendant le même temps. Il paroît donc encore que pour les roues placées ſur des rivières, la vîteſſe du centre d'impreſſion doit être environ les deux cinquièmes de celle du courant.

812. Examinons maintenant ſi dans les roues verticales il eſt avantageux ou non d'incliner les aîles au raïon, comme on le fait quelqueſois, & comme on le voit Fig. 92. Fig. 92.

Les expériences qui compoſent la première des trois tables ſuivantes, ont été faites ſur le canal de la Figure 47; celles des deux autres tables, ſur le courant de l'article 802.

Par le mot *directes*, ou en abrégé, *direct.* qu'on trouvera dans ces tables, j'entends que les aîles ſont

dirigées au centre (Fig. 91); & par les mots, *inclinaison de* 8°, *inclinaison de* 12°, *&c*, (ce que j'écris ainsi par abréviation, *incl.* 8°, *incl.* 12°, *&c*), j'entends que les aîles sont avec le raïon *CB* un angle *CBA* (Fig. 92), de 8°, de 12°, *&c.*

EXPÉRIENCES XLVI, XLVII.... LI.

813. La pale est élevée de 2 pouces; & la vîtesse de l'eau dans le canal, est de 300 pieds, en 27 secondes, comme dans l'article 637.	48 aîles.	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
	direct.	34	40	$20\frac{26}{48}$
	incl. 8°.	34	40	$19\frac{20}{48}$
	incl. 8°.	38	40	$17\frac{5}{48}$
	incl. 12°.	34	40	$19\frac{40}{48}$
	incl. 12°.	38	40	$17\frac{22}{48}$
	incl. 16°.	34	40	$20\frac{24}{48}$

RÉFLEXION.

814. Les aîles dirigées au centre sont, dans l'hypothèse du canal proposé, plus avantageuses que les aîles inclinées de 8 degrés au raïon, celles-ci moins avantageuses que les aîles inclinées de 12 degrés, celles-ci

celles-ci moins avantageuſes que les aîles inclinées de 16 degrés. L'effet eſt à-peu-près le même, lorſque les aîles ſont directes, & lorſqu'elles ſont inclinées de 16 degrés au raïon. Tout cela eſt évident à l'inſpection de notre table. En voici l'explication phyſique. Lorſque les aîles tendent au centre, il s'en faut peu que chacune d'elles ne ſoit frappée perpendiculairement par le fluide, & que par conſéquent la percuſſion ne ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible. Mais lorſqu'elles ſont inclinées au raïon, la percuſſion eſt oblique; & elle ſe décompoſe en deux forces, l'une perpendiculaire à l'aîle, la ſeule qui agiſſe par le choc, l'autre dirigée ſuivant l'aîle, qui n'agit pas par le choc, mais qui fait monter l'eau le long de l'aîle : or, comme cette eau ainſi élevée demeure pendant un certain temps ſur l'aîle, elle la preſſe par ſon poids, & il peut ſe faire que l'effort qui en réſulte, compenſe à-peu-près la diminution que le choc reçoit par l'obliquité ſous laquelle l'aîle eſt frappée. On ne peut pas établir en général quelle eſt la meilleure combinaiſon de ces différentes forces; elle dépend de la vîteſſe, de l'inclinaiſon du courant, & du fardeau enlevé. Mais en ſuppoſant qu'on ait trouvé en effet la poſition la plus avantageuſe des aîles, cet avantage ſe fera d'autant plus ſentir (toutes choſes d'ailleurs égales) que la roue tournera plus lentement. Dans les roues poſées ſur des canaux qui ont peu de pente & dans leſquels l'eau a la liberté de s'échapper aiſément après le choc, il convient de diriger les aîles au centre. Au con-

traire, ſur les courſiers qui ont beaucoup de pente, les aîles doivent être inclinées d'une certaine quantité au raïon, tant pour être frappées plus perpendiculairement, que pour recevoir une augmentation de force de la part du poids de l'eau.

EXPÉRIENCES LII, LIII,.... LVIII.

	48 aîles.	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
815. La roue eſt plongée verticalement, de 3 pouces, dans l'eau.	direct.	20	60	$17 \frac{5}{48}$
	direct.	32	60	$10 \frac{26}{48}$
	incl. 10°.	20	60	$16 \frac{42}{48}$
	incl. 10°.	32	60	$11 \frac{3}{48}$
	incl. 20°.	20	60	17
	incl. 20°.	32	60	$11 \frac{40}{48}$
	incl. 30°.	32	60	$11 \frac{7}{48}$

On doit remarquer qu'il y avoit quelques irrégularités dans le mouvement du courant, leſquelles empêchent qu'on ne puiſſe regarder ces expériences comme parfaitement ſures. Il n'en eſt pas de même des ſuivantes qui ſont fort exactes.

EXPÉRIENCES LIX, LX, LXI, LXII.

816. La roue est plongée verticalement, de 4 pouces, dans l'eau.	12 aîles.	Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
	direct.	40	40	$13\frac{17}{48}$
	incl. 15°.	40	40	$14\frac{21}{48}$
	incl. 30°.	40	40	$14\frac{22}{48}$
	incl. 37°.	40	40	$14\frac{15}{48}$

RÉFLEXION.

817. Le Lecteur fera aisément de lui-même les remarques qui naissent de ces expériences. On voit que dans les cas pareils à celui de la dernière table, l'obliquité la plus avantageuse des aîles au raïon est placée entre 15 & 30 degrés. Il y a toujours une certaine obliquité qu'il ne faut pas passer, parce qu'on perdroit plus par la diminution du choc qu'on ne regagneroit par le poids de l'eau qui glisse sur les aîles & qui les presse.

M. Deparcieux rapporte dans le Mémoire déja cité plusieurs expériences dans lesquelles les aîles inclinées au raïon sont plus avantageuses que les aîles dirigées au centre.

SECTION III.

Théorie du mouvement des roues mues par le poids de l'eau, ou en même temps par le poids & par le choc de l'eau.

818. Les roues mues par le poids de l'eau, dont il eſt ici queſtion, & qu'on appelle ordinairement *roues à pots*, ſont celles qui reçoivent l'eau d'un Fig. 94. courant dans des *augets* ou pots *A m n* (Fig. 94), & qui tournent en vertu de l'effort que cette eau exerce par ſa peſanteur. Les augets doivent conſerver le plus qu'il eſt poſſible l'eau qu'ils prennent, & par conſéquent chacun d'eux ne doit commencer à ſe vuider que quand il eſt arrivé aux environs du point *D*, extrémité inférieure de la verticale *AD*.

Quelquefois la roue a moins de vîteſſe que le fluide a ſon entrée dans les augets; & alors elle eſt mûe tout-à-la-fois par le choc de l'eau qui entre à chaque inſtant dans les augets, & par le poids de celle qu'ils contiennent.

819. Dans les premiers inſtans le mouvement de la roue s'accélère de plus en plus. Mais après quelques révolutions il parvient à l'uniformité; & alors la force que la roue reçoit du fluide ou par le poids ſeul, ou par le poids combiné avec le choc, eſt continuellement en équilibre avec le fardeau Q que la machine enlève, ou peut être cenſée enlever, & avec la réſiſtance du frottement. L'équilibre dont il

s'agit, eſt le même que ſi la machine étoit en repos. Je ne conſidère le mouvement que lorſqu'il eſt ainſi devenu uniforme.

820. Cela poſé, ſoit *ABDE* (Fig. 95) une roue verticale & parfaitement mobile autour de ſon centre *C*. Que la portion de couronne *GgBhH* dont la hauteur *Gg* ou *Hh* eſt regardée comme infiniment petite par rapport au raïon *CM* de la roue, ſoit couverte d'eau. Du centre *C* ſoient menés les deux raïons infiniment voiſins *CM*, *Cm*, leſquels déterminent la petite quantité élémentaire d'eau *MNnm*; & des points *G*, *H*, *M*, *m* ſoient menées les horiſontales *GF*, *HV*, *MP*, *mp*. Soit encore abaiſſée la verticale *MI* qui rencontre en I le diamètre horiſontal *BE*, & en *t* l'ordonnée *mp* au diamètre vertical *AD*. La portion d'eau *MNnm* peut être repréſentée par $Mm \times MN$; & ſon moment par rapport au centre *C*, eſt par conſéquent $Mm \times MN \times CI$ ou $Mm \times MN \times MP$. Or à cauſe des triangles ſemblables *Mtm*, *MPC*, on a $Mm : CM :: Mt$ ou $Pp : MP$, & par conſéquent $Mm \times MP = Pp \times CM$. Donc le moment en queſtion $= MN \times CM \times Pp$. Comme le même raiſonnement & la même concluſion ont lieu pour toutes les autres parties élémentaires de l'eau *GgBhH*, il eſt évident que le moment du poids de toute cette eau eſt exprimé par $MN \times CM \times FV$. Fig. 95.

821. Donc ſi la roue tourne avec une vîteſſe égale à celle de l'eau à ſon entrée dans les augets, de manière qu'il n'y ait point de choc; & ſi l'on

nomme Q le fardeau enlevé, c son bras de levier; A la section rectangulaire d'un auget, section dont MN est la hauteur, tandis que sa largeur est horisontale : on aura l'équation $Q \times c = A \times CM \times FV$, laquelle donne (en nommant de plus v la vîtesse du poids Q, u celle de la circonférence de la roue, & considérant que $v = \frac{cu}{CM}$),

(A) $Qv = A \times FV \times u$,

qui servira à déterminer l'effet de la machine dans l'hypothèse dont il s'agit.

822. Soit d'abord une roue verticale $ABDE$ (Fig. 96), mue par l'eau d'un canal $OZGg$ fermé par en-haut, & qui forme ainsi une espèce de tuyau tel que menant l'horisontale GF, la vîtesse en G peut être regardée comme dûe à la hauteur RF qui répond à celle de l'eau contenue dans le réservoir provisionnel $XZYT$. Le point R est regardé comme fixe, en quelqu'endroit qu'on prenne le point G sur l'arc ABD; & par conséquent la dépense du tuyau est en raison sous-doublée de la hauteur RF. Je suppose que la circonférence $ABDE$ tourne avec une vîtesse égale à celle du fluide au point G, & qu'ainsi il n'y ait point de choc à l'entrée du fluide dans les augets. Soit la portion de couronne $GBHhbg$ la quantité d'eau qui est constamment dans les augets, de manière qu'il s'en échappe autant par Hh qu'il en entre par Gg, & que l'épaisseur de la couronne dans toute son étendue soit égale à Gg. Du point H soit menée HV perpendiculaire à

AD. Gardons les dénominations de l'article précédent ; & nommons de plus h la hauteur dûe à une vîteſſe donnée u'. On aura (235 n°. 1), $u = u' \times \frac{\sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$. Ainſi l'équation (A) deviendra

$$(B) \qquad Qv = \frac{A \times FV \times u' \times \sqrt{RF}}{\sqrt{h}}.$$

Donc, pour que la machine produiſe ſon plus grand effet, il faut que $\frac{A \times FV \times u' \times \sqrt{RF}}{\sqrt{h}}$, devienne un *maximum ;* & comme les quantités A, u', h ſont conſtantes & données, on doit avoir pour cela, $FV \times \sqrt{RF} = maximum$. Or lorſqu'une quantité eſt un *maximum*, ſon quarré en eſt auſſi un ; donc $\overline{FV}^2 \times RF = maximum$. On trouve par la méthode de l'article 787 que la droite RV doit être, en ce cas, diviſée au point F, de manière que l'on ait $RF = \frac{RV}{3}$. Ainſi *pour le plus grand effet de la machine, la hauteur dûe à la vîteſſe de la roue doit être le tiers de la hauteur du réſervoir au-deſſus du point le plus bas où l'eau eſt cenſée abandonner la roue.*

823. En ſubſtituant à la place de RF cette valeur, & à la place de FV ſa valeur $\frac{2}{3}RV$, dans l'équation (B), on aura $Qv = \frac{A \times 2\,RV}{3\sqrt{3}} \times u' \times \frac{\sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$, expreſſion du plus grand effet de la machine.

824. La ſolution de ce problême peut être utile, lorſqu'ayant une roue toute conſtruite on veut la faire tourner de la manière la plus avantageuſe, par le ſeul poids de l'eau, & lorſque de plus la hauteur du réſervoir étant donnée & conſtante, on eſt libre de prendre plus ou moins d'eau, ſelon le beſoin. On voit donc qu'alors il faut diriger le canal $OZGg$ qui conduit l'eau à la roue, de manière que cette eau ſoit reçue toute entière dans les augets, que la hauteur RF ſoit le tiers de RV, & que la circonférence de la roue prenne la vîteſſe du fluide en G. Il eſt indifférent que l'eau entre par-deſſus la roue, comme dans la Figure 96, ou qu'elle entre par le côté, comme dans la Figure 97.

825. Comme on eſt maître de procurer à l'eau la chûte RV, on demandera ſi au lieu d'une roue à pots il ne ſeroit pas plus avantageux d'employer une roue à aîles, que le fluide mu avec une vîteſſe dûe à cette chûte vint frapper. Pour répondre à cela, on obſervera que la vîteſſe du fluide, ſous la hauteur RV, étant exprimée par $\frac{u' \times \sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$, & la ſurface A étant ſuppoſée demeurer la même, le plus grand effet de la roue à aîles ſeroit repréſenté (788) par $\frac{8A \times RV}{27}$ $\times \frac{u' \times \sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$. Donc le plus grand effet de la roue à pots, eſt au plus grand effet de la roue à aîles, comme $\frac{A \times 2RV}{3\sqrt{3}} \times \frac{u' \times \sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$ eſt à $\frac{8A \times RV}{27} \times \frac{u' \times \sqrt{RV}}{\sqrt{h}}$, ou comme 9 eſt à $4\sqrt{3}$, ou comme 9 eſt à $6,928$

environ. La roue à pots eſt donc plus avantageuſe que la roue à aîles. A quoi il ſaut ajouter que la première dépenſe moins que la ſeconde, dans la raiſon de $\sqrt{RF}$ à $\sqrt{RV}$, ou de 1 à $\sqrt{3}$.

826. L'hypothèſe qui ſert de baſe aux articles 822, 823, 824, que la hauteur du réſervoir demeurant la même, on eſt maître de prendre plus ou moins d'eau, à volonté, n'a pas lieu ordinairement dans la pratique. Il arrive le plus ſouvent que le réſervoir donne conſtamment des quantités égales d'eau en temps égaux, de quelque manière & à quelque hauteur qu'on reçoive cette eau dans la roue. Suppoſons donc que $ABDE$ (Fig. 98) ſoit Fig. 98. une roue verticale mue par l'eau d'un canal qui eſt ouvert par en haut; & nommons M la quantité conſtante d'eau que ce canal fournit en un temps donné, en 1 ſeconde, par exemple. La vîteſſe u de la circonférence de la roue ſera l'eſpace que cette circonférence parcourt en 1 ſeconde. Il eſt clair qu'on aura $A \times u = M$, ou $A = \frac{M}{u}$. Mettons cette valeur de A dans l'équation (A) de l'article 821, & nous aurons $Qv = M \times FV$. D'où il ſuit qu'afin de rendre l'effet Qv de la machine, le plus grand qu'il eſt poſſible, il faut augmenter FV le plus qu'il eſt poſſible.

827. On voit donc par-là que la hauteur RV étant donnée, & la dépenſe M demeurant toujours la même au moyen des changemens qu'on eſt maître de faire à l'orifice OZ, plus on diminuera la par-

tie RF, plus on augmentera l'effet de la machine. Or, à mesure que RF diminue, la vîtesse du fluide, & par conséquent aussi celle de la roue diminue. Donc la roue produira un effet d'autant plus grand, qu'elle tournera avec plus de lenteur. Mais il ne faut pas pousser trop loin cette lenteur. Car les dimensions, c'est-à-dire, la largeur & la hauteur des augets, étant données par l'équation $A = \frac{M}{u}$, on voit qu'en diminuant u on augmente A. Or, l'augmentation de A a ses limites, autrement la roue deviendroit trop large & trop haute, & pesante en conséquence.

828. L'effet de notre roue à pots étant représenté par $M \times FV$, ou par $M \times (RV - RF)$, il est aisé de voir par l'article 788, que le plus grand effet d'une roue à aîles, sous la profondeur RV, seroit représenté par $\frac{8M \times RV}{27}$; car la dépense est comme le produit de l'orifice par la vîtesse, & la vîtesse est comme la racine de la hauteur. Donc l'effet de la roue à pots est au plus grand effet de la roue à aîles, comme $27(RV - RF)$, est à $8RV$. D'où il suit que RF étant supposée beaucoup plus petite que RV, l'effet de la roue à pots est beaucoup plus grand que celui de la roue à aîles.

829. Soit maintenant une roue qui tourne avec une vîtesse moindre que celle du fluide en G, & qui soit par conséquent mue en partie par le choc de l'eau. Nommons u la vîtesse de la roue, V celle

du fluide en G, F l'impulsion perpendiculaire qu'il donneroit avec cette vîtesse à un plan B en repos, C la surface plane à laquelle se réduit la surface des augets frappée perpendiculairement par le fluide; & gardons les autres dénominations des articles précédens. Nous trouverons (786 & 826) l'équation

$$(C) \qquad Qv = M \times FV + \frac{F \times C (V - u)^2 \times u}{B \times V^2}.$$

830. Pour déterminer en ce cas le plus grand effet de la machine, on observera que dans le second membre tout est constant & donné, excepté la quantité $(V - u)^2 \times u$. On trouvera donc, comme dans l'article 787, $u = \frac{V}{3}$. Mettant cette valeur dans l'équation (C), prenant $B = C$, & faisant $F = 2C \times RF$, comme cela est vrai sensiblement (748), enfin considérant que $M = C \times V$; on trouvera

$$Qv = M \times FV + \frac{8 M \times RF}{27},$$

ou bien

$$Qv = M \times \left(RV - \frac{19 RF}{27} \right).$$

D'où l'on voit que cette roue produira d'autant plus d'effet qu'elle tournera plus lentement. Son plus grand effet est à celui que produiroit une roue à aîles sous la chûte RV, comme $27 \left(RV - \frac{19 RF}{27} \right)$, est à $8 RV$.

831. Il suit de tout ce que nous venons de dire,

que les roues à pots ſont beaucoup plus avantageuſes que les roues à aîles, lorſqu'on peut ſe procurer une grande chûte d'eau. On doit donc employer des roues à pots dans ces ſortes de cas. Mais ſouvent la chûte d'eau eſt petite, & on eſt obligé de prendre l'eau par-deſſous la roue, au moyen d'aîles que le fluide frappe. De plus il y a des occaſions où l'on a beſoin que la roue tourne très-vîte, & où l'on a d'ailleurs de l'eau en abondance. Alors une roue à aîles eſt fort bonne. Comme les roues à pots produiſent d'autant plus d'effet qu'elles tournent plus lentement, on ne pourroit en ce cas employer une roue de cette eſpèce qu'en la faiſant engrainer avec une lanterne ou avec une autre roue; ce qui compliqueroit la machine & augmenteroit les frottemens. Les roues à aîles ſont encore les ſeules qui puiſſent être d'uſage ſur les rivières.

SECTION IV.

Expériences & Réflexions ſur les roues à pots.

832. Les expériences que j'ai faites ſur les roues à pots ſont en petit nombre. Néanmoins je crois qu'on ne ſera pas fâché de les trouver ici.

Fig. 94. La Figure 94 repréſente la machine dont je me ſuis ſervi. Le canal *XYTZ* qui amene l'eau à la roue eſt horiſontal. Il a 5 pouces de largeur, & l'eau y eſt comme ſtagnante. Il fournit conſtamment

la même quantité d'eau qui eſt de 1194 pouces cubes en 1 minute. Le diamètre *AD* de la roue eſt de 3 pieds; celui de la bobine cylindrique ſur laquelle la corde s'enveloppe eſt de 2 pouces 7 lignes; celui des tourillons, de 2 ½ lignes. La poulie *O* eſt la même que dans les expériences ſur les roues à aîles. La hauteur des pots eſt d'environ 3 pouces, leur largeur de 5 pouces. Ils ſont au nombre de 48.

Dans les expériences qui ſuivent, on ne commence à compter le nombre de tours que lorſque le mouvement eſt devenu uniforme; ce qui arrive après les 5 ou 6 premiers tours.

EXPÉRIENCES I, II, III,..... VIII.

833.

Fardeau enlevé, exprimé en livres.	Secondes.	Nombre de tours.
11	60	11 $\frac{46}{48}$
12	60	11 $\frac{11}{48}$
13	60	10 $\frac{25}{48}$
14	60	9 $\frac{40}{48}$
15	60	9 $\frac{10}{48}$
16	60	8 $\frac{31}{48}$
17	60	8 $\frac{9}{48}$
18	60	7 $\frac{32}{48}$

En mettant 19 livres pour fardeau, la roue tourne encore, mais très-lentement. Lorſque le fardeau eſt de 20 livres, la roue s'arrête quoiqu'on l'ait d'abord miſe en mouvement avec la main, pour lui faire prendre l'eau. Cependant le fardeau paroît encore un peu foible.

La roue, lorſqu'elle n'a point de fardeau à élever, fait $40 \frac{1}{4}$ tours en 1 minute.

Réflexions.

834. Si l'on multiplie chaque fardeau enlevé par le nombre correſpondant de tours de la roue, on trouvera que ces produits vont d'abord en augmentant, puis en diminuant. Le plus grand d'entr'eux eſt celui qui répond à 17 livres environ. Alors la roue tourne avec une vîteſſe qui eſt ſenſiblement telle que la formule de l'article 830 le demande.

835. Puiſque dans le cas du plus grand effet la roue fait $8 \frac{3}{16}$ tours en 1 minute, & que durant le même temps elle feroit $40 \frac{1}{4}$ tours ſi elle n'enlevoit aucun fardeau, il s'enſuit que la vîteſſe requiſe pour le plus grand effet, eſt à la vîteſſe que la roue prendroit naturellement ſi elle n'avoit aucun fardeau à enlever, comme $8 \frac{3}{16}$ eſt à $40 \frac{1}{4}$, ou comme 1 eſt à 5 environ. Cette remarque peut être utile dans la pratique.

NOTES SUR LE CHAPITRE X.

Manière générale de déterminer les effets des roues à aîles.

I. L'objet que je me propose ici est de déterminer en général l'effet d'une roue à aîles, en ayant égard à l'impulsion du fluide contre toutes les aîles qu'il frappe à-la-fois. Ce problême est entièrement nouveau. Tous les Auteurs qui ont écrit sur cette matière, n'ont considéré l'impulsion que contre une seule aîle; ce qui facilite la solution, mais aussi lui enleve cette généralité si précieuse aux Géomètres. La théorie que je vais donner, est destinée à servir de Supplément ou de Commentaire aux articles 778, 782, 785.

II. Soit $AKDB$ (Fig. 93) la circonférence extérieure d'une roue verticale plongée dans un courant horisontal $XYTZ$ dont tous les points se meuvent avec la même vîtesse. Que cette roue porte un nombre quelconque d'aîles Ee, Ff, Gg, &c, dirigées au centre C. Soit Mm un élément quelconque de l'aîle Ee. Du point A où la surface du fluide rencontre la circonférence $AKDB$, soit mené au centre C le raïon AC; & soit abaissé le raïon vertical CI. Supposons ensuite Fig. 93.

le raïon CA de la roue.................. $= a$
la largeur des aîles...................... $= b$
le sinus total............................ $= 1$

l'angle ACI . . . . $= m$

l'angle ECI que fait la première aîle choquée, avec la verticale . . . . $= p$

l'angle ECF ou FCG, &c, compris entre deux aîles voisines. . . . . $= q$

la vîtesse du fluide . . . . $= V$

la vîtesse d'un point quelconque de la circonférence $AKDB$ . . . . $= u$

EM . . . . $= x$

Mm . . . . $= dx$,

l'impulsion perpendiculaire du fluide contre un plan B en repos . . . . $= F$.

En décomposant la vîtesse du fluide comme dans l'article 771, on aura évidemment My ou $zx = u \times \frac{CM}{CA} = \frac{u(a-x)}{a}$, $nx = V \text{cos}. p$, $nz = nx - zx = V \text{cos}. p - \frac{u(a-x)}{a}$, sin. $zMn = \frac{nz}{Mz} = \frac{aV \text{cos}. p - u(a-x)}{a \times Mz}$. Donc l'impulsion qui résulte perpendiculairement à Mm sera représentée (728) par $\frac{F \times b\,dx\,(aV \text{cos}. p - u(a-x))^2}{a^2 \times B \times V^2}$; & si l'on nomme dM le moment de cette impulsion élémentaire, on aura

$$dM = \frac{F \times b\,dx\,(aV \text{cos}. p - u(a-x))^2 . (a-x)}{a^2 B \times V^2},$$

ou bien, en faisant pour abréger, $\frac{Fb}{B \times V^2} = n$, & changeant un peu la forme de l'équation,

(A) $dM = n\,dx \left(V - \frac{u(a-x)}{a \operatorname{cof.} p}\right)^2 . \operatorname{cof.} p^2 . (a-x)$.

III. On voit que cette équation s'intègre ſans aucune difficulté. Mais avant que de faire cette opération, j'obſerve que ſi la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \operatorname{cof.} p}$ au lieu d'être poſitive étoit négative, ce ſeroit l'aîle qui pouſſeroit le fluide au lieu d'en être pouſſée. Cependant comme le quarré de l'une & l'autre expreſſion, eſt toujours le même, on ne pourroit pas diſcerner lequel des deux cas a lieu, ſi l'on intégroit à l'ordinaire. Voici donc ce qu'il faut faire en général. On examinera ce que devient la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \operatorname{cof.} p}$, lorſque $x = EV = CE - CV = a - \frac{Ck}{\operatorname{cof.} p} = a - \frac{a \operatorname{cof.} m}{\operatorname{cof.} p}$, & lorſque $x = 0$. Cela poſé, 1°. ſi la quantité en queſtion eſt poſitive dans les deux cas, le fluide pouſſe l'aîle dans toute l'étendue VE, & le calcul ſe fait comme nous le verrons tout-à-l'heure; 2°. ſi cette quantité eſt négative dans les deux cas, l'aîle pouſſe le fluide dans toute l'étendue VE, & le calcul ſe fait encore de la même manière; 3°. ſi la même quantité eſt poſitive dans le premier cas, & négative dans le ſecond une partie VR de l'aîle eſt pouſſée par le fluide tandis qu'au contraire l'autre partie RE de l'aîle pouſſe le fluide. Alors on déterminera le moment M de manière que l'intégrale s'évanouiſſe lorſque $V - \frac{u(a-x)}{a \operatorname{cof.} p} = 0$, ou lorſque $x = \frac{au - Va \operatorname{cof.} p}{u}$.

& qu'elle reçoive ſa valeur complette, lorſque $x = EV = a - \frac{a \text{ coſ. } m}{\text{coſ. } p}$. Soit nommée G cette intégrale qui exprime le moment de l'impulſion de l'eau contre VR. On déterminera encore M de manière que l'intégrale s'évanouiſſe, lorſque $x = 0$, & reçoive ſa valeur complette, lorſque $x = ER = \frac{au - Va \text{ coſ. } p}{u}$. Soit nommée H cette intégrale qui exprime le moment de l'impulſion de la partie RE de l'aîle contre le fluide. Il eſt clair que $G - H$, ou $H - G$ repréſentera le moment de la force réſultante qui pouſſe l'aîle ou le fluide.

Je n'ai pas beſoin d'ajouter que ſi la quantité $V - \frac{u(a - x)}{a \text{ coſ. } p}$ eſt poſitive en E, elle le ſera, à plus forte raiſon, en V, & dans toute l'étendue EV.

IV. Il eſt évident que le procédé du calcul eſt le même dans les trois ſuppoſitions, & qu'il s'agit toujours de prendre une ſomme ou une différence de momens d'impulſion. Je n'examinerai ici que la première, parce qu'elle a preſque toujours lieu. En effet, j'obſerve que ſi l'on a ſeulement $V \text{ coſ. } p = u$, la quantité $V - \frac{u(a - x)}{a \text{ coſ. } p}$ ſera néceſſairement poſitive dans toute l'étendue EV. Or dans la pratique on a preſque toujours $V \text{ coſ. } p > u$. Car ſoit $u = \frac{V}{3}$, comme cela arrive ordinairement; l'équation $V \text{ coſ. } p = u$, donneroit coſ. $p = \frac{1}{3}$, &

l'angle p d'environ 70 degrés 30 minutes. Or il eſt extrêmement rare que l'angle p ſoit auſſi conſidérable, ou que la quantité dont l'aîle trempe dans l'eau ſoit les deux tiers du raïon. La quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ coſ. } p}$ étant ainſi ſuppoſée poſitive, les quantités $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ coſ. } (p-q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ coſ. } (p-2q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \text{ coſ. } (p-3q)}$, &c, ſeront poſitives, à plus forte raiſon.

V. En intégrant l'équation (A) de manière que l'intégrale s'évanouiſſe, lorſque $x = 0$, & qu'elle reçoive ſa valeur complette, lorſque $x = EV = a - \frac{a \text{ coſ. } m}{\text{coſ. } p}$, on trouvera

$$M = \frac{na^2V^2(\text{coſ. } p^2 - \text{coſ. } m^2)}{2} - \frac{2na^2Vu}{3}\left(\text{coſ. } p - \frac{\text{coſ. } m^3}{\text{coſ. } p^2}\right) + \frac{na^2u^2}{4}\left(1 - \frac{\text{coſ. } m^4}{\text{coſ. } p^4}\right).$$

Nous ferons, pour abréger, $na^2V^2 = N$, $u = kV$, k étant un coëfficient donné ; enſorte que

$$M = N\left[\frac{\text{coſ. } p^2 - \text{coſ. } m^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\text{coſ. } p - \frac{\text{coſ. } m^3}{\text{coſ. } p^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\text{coſ. } m^4}{\text{coſ. } p^4}\right)\right].$$

VI. Par le point E ſoit menée $E1$ parallèle à la ſurface XY de l'eau. Il eſt clair qu'il n'y a que la partie FV' de l'aîle Ff, qui ſoit frappée par le fluide. En nommant M' le moment de l'impulſion de l'eau

contre cette partie, on trouvera toujours par la même méthode,

$$M' = N\left[\frac{\text{cof.}\,(p-q)^2 - \text{cof.}\,p^2}{2} - \frac{2k}{3} \times \left(\text{cof.}\,(p-q) - \frac{\text{cof.}\,p^3}{\text{cof.}\,(p-q)^2}\right) + \frac{k^2}{4} \times \left(1 - \frac{\text{cof.}\,p^4}{\text{cof.}\,(p-q)^4}\right)\right].$$

De même, en menant $F2$, $G3$, &c, parallèles à la surface du fluide, & nommant M'', M''', &c, M^{π} respectivement, les momens des impulsions contre les parties, GV'', HV''', &c, & contre une partie indéterminée, on aura les équations,

$$M'' = N\left[\frac{\text{cof.}\,(p-2q)^2 - \text{cof.}\,(p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\text{cof.}\,(p-2q) - \frac{\text{cof.}\,(p-q)^3}{\text{cof.}\,(p-2q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\text{cof.}\,(p-q)^4}{\text{cof.}\,(p-2q)^4}\right)\right],$$

$$M''' = N\left[\frac{\text{cof.}\,(p-3q)^2 - \text{cof.}\,(p-2q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\left(\text{cof.}\,(p-3q) - \frac{\text{cof.}\,(p-2q)^3}{\text{cof.}\,(p-3q)^2}\right) + \frac{k^2}{4}\left(1 - \frac{\text{cof.}\,(p-2q)^4}{\text{cof.}\,(p-3q)^4}\right)\right],$$

. . . .

$$M^{\pi} = N\left[\frac{\text{cof.}\,(p-\theta q)^2 - \text{cof.}\,(p-(\theta-1)q)^2}{2}\right.$$

$$-\frac{2k}{3}\left(\text{cos}.(p-\theta q)-\frac{\text{cos}.(p-(\theta-1)q)^3}{\text{cos}.(p-\theta q)^2}\right)$$

$$+\frac{k^2}{4}\left(1-\frac{\text{cos}.(p-(\theta-1)q)^4}{\text{cos}.(p-\theta q)^4}\right)\Big];$$

le nombre entier $\theta+1$ exprimant le nombre des aîles choquées.

VII. Par conséquent, si l'on prend $S=\frac{M+M'+M'''+\ldots+M^{n}}{N}$ pour abréger l'expression, & qu'on efface les termes qui se détruisent, on aura

$$S=\frac{\text{cos}.(p-\theta q)^2-\text{cos}.m^2}{2}$$

$$\frac{2k}{3}\times\left\{\begin{array}{l}\text{cos}.p-\frac{\text{cos}.m^3}{\text{cos}.p^2}\\ +\text{cos}.(p-q)-\frac{\text{cos}.p^3}{\text{cos}.(p-q)^2}\\ +\text{cos}.(p-2q)-\frac{\text{cos}.(p-q)^3}{\text{cos}.(p-2q)^2}\\ +\text{cos}.(p-3q)-\frac{\text{cos}.(p-2q)^3}{\text{cos}.(p-3q)^2}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\text{cos}.(p-\theta q)-\frac{\text{cos}.(p-(\theta-1)q)^3}{\text{cos}.(p-\theta q)^2}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k^2}{4}\times\left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{\text{cos}.\,m^4}{\text{cos}.\,p^4} \\ +1-\dfrac{\text{cos}.\,p^4}{\text{cos}.\,(p-q)^4} \\ +1-\dfrac{\text{cos}.\,(p-q)^4}{\text{cos}.\,(p-2q)^4} \\ +1-\dfrac{\text{cos}.\,(p-2q)^4}{\text{cos}.\,(p-3q)^4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +1-\dfrac{\text{cos}.\,(p-(\theta-1)q)^4}{\text{cos}.\,(p-\theta q)^4} \end{array}\right\}$$

formule qui donne pour un inſtant le moment total de l'impulſion de l'eau, quelque ſoit le nombre des aîles. Il eſt clair que S varie, à meſure que (tout reſtant d'ailleurs le même) l'angle p varie, ou que la roue en tournant, prend différentes poſitions.

VIII. Qu'outre les dénominations précédentes, on appelle encore Q le poids variable auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque inſtant, c ſon bras de levier, dt l'élément du temps, dy le petit arc décrit, pendant l'inſtant dt, par un point de la circonférence $AKDB$. On aura $Q\times c = N.S$, & $Q\times c\times dt = N.S\,dt$. Mais $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$. (J'écris $-dp$, parce que t augmentant, p diminue). On aura donc $Q\times c\times dt = -\frac{aN.S\,dp}{u}$,

& $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int - S\,dp.$

IX. Ayant subſtitué à la place de S ſa valeur trouvée (art. VII), on aura dans le ſecond membre de l'équation différentes ſortes de termes. Je mets à part dans les calculs ſuivans les coëfficiens conſtans. D'abord le terme $dp\,(\text{coſ.}\,(p - \theta q)^2 - \text{coſ.}\,m^2)$ s'intègre facilement; car il devient $\frac{dp}{2} + \frac{dp\,\text{coſ.}\,(2p - 2\theta q)}{2} - dp\,\text{coſ.}\,m^2$, dont l'intégrale eſt $\frac{p}{2} + \frac{\text{ſin.}\,(2p - 2\theta q)}{4} - p\,\text{coſ.}\,m^2$.

L'intégrale de $dp\,\text{coſ.}\,p$ eſt ſin. p; celle de dp coſ. $(p-q)$ eſt ſin. $(p - q$; celle de dp coſ. $p - 2q)$ eſt ſin. $(p - 2q)$. Ainſi de ſuite pour les termes de cette eſpèce.

La ſeule difficulté eſt d'intégrer les termes $\frac{dp\,\text{coſ.}\,m^3}{\text{coſ.}\,p^2}$, $\frac{dp\,\text{coſ.}\,p^3}{\text{coſ.}\,(p-q)^2}$, $\frac{dp\,\text{coſ.}\,(p-q)^3}{\text{coſ.}\,(p-2q)^2}$, &c, ainſi que les termes $\frac{dp\,\text{coſ.}\,m^4}{\text{coſ.}\,p^4}$, $\frac{-dp\,\text{coſ.}\,p^4}{\text{coſ.}\,(p-q)^4}$, $\frac{dp\,\text{coſ.}\,(p-q)^4}{\text{coſ.}\,(p-2q)^4}$, &c. Voici la manière de faire ces intégrations.

X. 1°. Il eſt aiſé d'intégrer $\frac{dp}{\text{coſ.}\,p^2}$. Car en faiſant coſ. $p = \frac{1}{z}$, on a $\frac{dp}{\text{coſ.}\,p^2} =$

$\frac{z\,dz}{\surd(zz-1)}$ dont l'intégrale est $\surd(zz-1) = \frac{\text{ſin.}\,p}{\text{coſ.}\,p}$.

2°. Pour intégrer $\frac{dp\,\text{coſ.}\,p^3}{\text{coſ.}\,(p-q)^2}$, on obſervera que $\text{coſ.}\,p = \text{coſ.}\,((p-q)+q) = \text{coſ.}\,(p-q)\,\text{coſ.}\,q - \text{ſin.}\,(p-q).\,\text{ſin.}\,q$, & par conſéquent $\frac{dp\,\text{coſ.}\,p^3}{\text{coſ.}\,(p-q)^2} = dp\,\text{coſ.}\,(p-q)\,\text{coſ.}\,q^3 - 3\,dp\,\text{ſin.}\,(p-q).\,\text{ſin.}\,q.\,\text{coſ.}\,q^2 + \frac{3\,dp\,\text{ſin.}\,(p-q)^2\,\text{ſin.}\,q^2\,\text{coſ.}\,q}{\text{coſ.}\,(p-q)} - \frac{dp\,\text{ſin.}\,(p-q)^3\,\text{ſin.}\,q^3}{\text{coſ.}\,(p-q)^2} = \text{coſ.}\,q^3.\,dp\,\text{coſ.}\,(p-q) - 3\,\text{ſin.}\,q.\,\text{coſ.}\,q^2.\,dp\,\text{ſin.}\,(p-q) + 3\,\text{ſin.}\,q^2\,\text{coſ.}\,q.\,\frac{dp}{\text{coſ.}\,(p-q)} - 3\,\text{ſin.}\,q^2\,\text{coſ.}\,q.\,dp\,\text{coſ.}\,(p-q) - \text{ſin.}\,q^3\,\frac{dp\,\text{ſin.}\,(p-q)}{\text{coſ.}\,(p-q)^2} + \text{ſin.}\,q^3.\,dp\,\text{ſin.}\,(p-q)$. Or $\int dp\,\text{coſ.}\,(p-q) = \text{ſin.}\,(p-q)$; $\int dp\,\text{ſin.}\,(p-q) = -\text{coſ.}\,(p-q)$. Le terme $\frac{dp}{\text{coſ.}\,(p-q)}$ s'intégre en faiſant $\text{coſ.}\,(p-q) = \frac{1}{s}$; ce qui donne

$$dp = \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{\surd\left(1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right)} = \frac{ds}{s\surd(ss-1)},$$

$\frac{dp}{\text{coſ.}\,(p-q)} = \frac{ds}{\surd(ss-1)}$ dont l'intégrale eſt

$L.(s + \sqrt{(ss - 1)}) = L.\left(\frac{1 + \sin.(p - q)}{\cos.(p - q)}\right)$. Le terme $\frac{dp \sin.(p - q)}{\cos.(p - q)^2}$ eſt la même choſe que $\frac{-d.\cos.(p - q)}{\cos.(p - q)^2}$; & il a par conſéquent pour intégrale $\frac{1}{\cos.(p - q)}$. Ainſi l'intégrale entière de $\frac{dp \cos.p^3}{\cos.(p - q)^2}$ eſt $\cos.q^3 \sin.(p - q) + 3 \sin.q \cos.q^2 \cos.(p - q) + 3 \sin.q^2 \cos.q \times L.\left(\frac{1 + \sin.(p - q)}{\cos.(p - q)}\right) - 3 \sin.q^2 \cos.q \sin.(p - q) - \frac{\sin.q^3}{\cos.(p - q)} - \sin.q^3 \cos.(p - q)$.

De même, en obſervant que $\cos.(p - q) = \cos.((p - 2q) + q) = \cos.(p - 2q) \cos.q - \sin.(p - 2q).\sin.q$, on trouvera que l'intégrale de $\frac{dp \cos.(p - q)^3}{\cos.(p - 2q)^2}$ eſt $\cos.q^3 \sin.(p - 2q) + 3 \sin.q \cos.q^2 \cos.(p - 2q) + 3 \sin.q^2 \cos.q. L.\left(\frac{1 + \sin.(p - 2q)}{\cos.(p - 2q)}\right) - 3 \sin.q^2 \cos.q \sin.(p - 2q) - \frac{\sin.q^3}{\cos.(p - 2q)} - \sin.q^3.\cos.(p - 2q)$.

On intégrera par la même méthode les quantités analogues $\frac{dp \cos.(p - 2q)^3}{\cos.(p - 3q)^2}$, $\frac{dp \cos.(p - 3q)^3}{\cos.(p - 4q)^2}$, &c.

3°. Pour intégrer $\frac{dp}{\cos.p^4}$, on fera $\cos.p =$

$\frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$; & on aura $\frac{dp}{\text{cof.}\, p^4} = dz + z^2 dz$, dont l'intégrale eſt $z + \frac{z^3}{3} = \frac{\text{fin.}\, p}{\text{cof.}\, p} + \frac{\text{fin.}\, p^3}{3\, \text{cof.}\, p^3}$.

4°. Pour intégrer $\frac{dp\, \text{cof.}\, p^4}{\text{cof.}\, (p-q)^4}$, on obſervera, comme tout-à-l'heure, que cof. $p =$ cof. $((p-q)+q)$ $=$ cof. $(p-q)$ cof. q — fin. $(p-q)$. fin. q; & que par conſéquent $\frac{dp\, \text{cof.}\, p^4}{\text{cof.}\, (p-q)^4} = dp\, \text{cof.}\, q^4 - 4\, \text{cof.}\, q^3\, \text{fin.}\, q \times \frac{dp\, \text{fin.}\, (p-q)}{\text{cof.}\, (p-q)} + 6\, \text{cof.}\, q^2\, \text{fin.}\, q^2 \times \frac{dp\, \text{fin.}\, (p-q)^2}{\text{cof.}\, (p-q)^2} - 4\, \text{cof.}\, q\, \text{fin.}\, q^3 \times \frac{dp\, \text{fin.}\, (p-q)^3}{\text{cof.}\, (p-q)^3} + \text{fin.}\, q^4 \times \frac{dp\, \text{fin.}\, (p-q)^4}{\text{cof.}\, (p-q)^4} = dp\, (\text{cof.}\, q^4 - 6\, \text{cof.}\, q^2\, \text{fin.}\, q^2 + \text{fin.}\, q^4) - (4\, \text{cof.}\, q^3\, \text{fin.}\, q - 4\, \text{cof.}\, q\, \text{fin.}\, q^3) \times \frac{dp\, \text{fin.}\, (p-q)}{\text{cof.}\, (p-q)} + (6\, \text{cof.}\, q^2\, \text{fin.}\, q^2 - 2\, \text{fin.}\, q^4) \times \frac{dp}{\text{cof.}\, (p-q)^2} - 4\, \text{cof.}\, q\, \text{fin.}\, q^3 \times \frac{dp\, \text{fin.}\, (p-q)}{\text{cof.}\, (p-q)^3} + \text{fin.}\, q^4 \times \frac{dp}{\text{cof.}\, (p-q)^4}$. Les différens termes de cette quantité s'intègrent par des méthodes & des transformations analogues aux précédentes; & on trouve que l'intégrale entière de $\frac{dp\, \text{cof.}\, p^4}{\text{cof.}\, (p-q)^4}$ eſt $p\, (\text{cof.}\, q^4 - 6\, \text{cof.}\, q^2\, \text{fin.}\, q^2 + \text{fin.}\, q^4) + (4\, \text{cof.}\, q^3\, \text{fin.}\, q - 4\, \text{cof.}\, q\, \text{fin.}\, q^3)$

$L.\,\text{cof.}\,(p-q) + (6\,\text{cof.}\,q^2\,\text{fin.}\,q^2 - \text{fin.}\,q^4)$
$$\frac{\text{fin.}\,(p-q)}{\text{cof.}\,(p-q)} - \frac{2\,\text{cof.}\,q\,\text{fin.}\,q^3}{\text{cof.}\,(p-q)^2} + \frac{\text{fin.}\,q^4\,\text{fin.}\,(p-q)^3}{3\,\text{cof.}\,(p-q)^3}.$$

Les quantités $\frac{dp\,\text{cof.}\,(p-q)^4}{\text{cof.}\,(p-2q)^4}$, $\frac{dp\,\text{cof.}\,(p-2q)^4}{\text{cof.}\,(p-3q)^4}$, *&c*, s'intégreront de la même manière.

XI. Tous ces calculs étant achevés, & prenant l'intégrale $\int -S\,dp$ de manière qu'elle s'évanouiſſe lorſque $p = m$, & reçoive ſa valeur complette lorſque $p = m - q$, on trouvera différentes ſuites de termes, telles que d'une ſuite à l'autre les termes ſe détruiſent en partie. Après avoir donc effacé tous ces termes, l'équation $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$ devient

$$(B)\quad c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\Big[\Big(\tfrac{1}{4} - \frac{\text{cof}\,m^2}{2}\Big)q + \tfrac{1}{8}$$
$$(\text{fin.}\,(2m - 2\theta q) - \text{fin.}\,(2m - 2(\theta+1)q)) +$$
$$\frac{2k\,\text{cof.}\,m^3}{3}\Big(\frac{\text{fin.}\,m}{\text{cof.}\,m} - \frac{\text{fin.}\,(m-q)}{\text{cof.}\,(m-q)}\Big) - \frac{2k}{3}$$
$$(\text{fin.}\,m - \text{fin.}\,(m - (\theta+1)q)) +$$
$$\frac{2k}{3}(\text{cof.}\,q^3 - 3\,\text{fin.}\,q^2\,\text{cof.}\,q)(\text{fin.}\,(m-q)$$
$$- \text{fin.}\,(m - (\theta+1)q)) + \frac{2k}{3}(3\,\text{fin.}\,q$$
$$\text{cof.}\,q^2 - \text{fin.}\,q^3)(\text{cof.}\,(m-q) - \text{cof.}\,(m$$
$$-(\theta+1)q)) - \frac{2k\,\text{fin}\,q^3}{3}\Big(\frac{1}{\text{cof.}\,(m-q)} -$$
$$\frac{1}{\text{cof.}\,(m-(\theta+1)q)}\Big) + 2k\,\text{fin.}\,q^2\,\text{cof.}\,q\,\times$$

$$\text{L.}\left(\frac{(1+\text{ſin.}(m-q))\text{coſ.}(m-(\theta+1)q))}{\text{coſ.}(m-q)(1+\text{ſin.}(m-(\theta+1)q))}\right)+\frac{k^2 q}{4}$$

$$(\theta+1-\text{ſin.}\,q^4-\text{coſ.}\,q^4+6\,\text{coſ.}\,q^2\,\text{ſin.}\,q^2)$$

$$-\frac{k^2\,\text{coſ.}\,m^4}{4}\left(\frac{\text{ſin.}\,m}{\text{coſ.}\,m}+\frac{\text{ſin.}\,m^3}{3\,\text{coſ.}\,m^3}-\right.$$

$$\left.\frac{\text{ſin.}(m-q)}{\text{coſ.}(m-q)}-\frac{\text{ſin.}(m-q)^3}{3\,\text{coſ.}(m-q)^3}\right)-k^2(\text{coſ.}\,q^3$$

$$\text{ſin.}\,q-\text{coſ.}\,q\,\text{ſin.}\,q^3).\ \text{L.}\,\frac{\text{coſ.}(m-q)}{\text{coſ.}(m-(\theta+1)q)}$$

$$-\frac{k^2}{4}(6\,\text{coſ.}\,q^2\,\text{ſin.}\,q^2-\text{ſin.}\,q^4)\left(\frac{\text{ſin.}(m-q)}{\text{coſ.}(m-q)}-\right.$$

$$\left.\frac{\text{ſin.}(m-(\theta+1)q)}{\text{coſ.}(m-(\theta+1)q)}\right)+\frac{k^2\,\text{coſ.}\,q\,\text{ſin.}\,q^3}{2}\times$$

$$\left(\frac{1}{\text{coſ.}(m-q)^2}-\frac{1}{\text{coſ.}(m-(\theta+1)q)^2}\right)-\frac{k^2}{12}\text{ſin.}\,q^4$$

$$\left.\left(\frac{\text{ſin.}(m-q)^3}{\text{coſ.}(m-q)^3}-\frac{\text{ſin.}(m-(\theta+1)q)^3}{\text{coſ.}(m-(\theta+1)q)^3}\right)\right].$$

XII. Dans cette formule, $\int Q\,dt$ repréſente le poids auquel le choc de l'eau peut faire équilibre pendant le temps t que la roue employe à parcourir l'angle q. Suppoſons $\frac{\int Q\,dt}{t}=Q'$, Q' étant ſimplement un poids, & conſidérons que $t=\frac{aq}{u}$. De plus, imaginons qu'au moment où la première aîle Ee entre dans l'eau, l'aîle Kk ſoit placée dans la verticale; ce qui donne $m=(\theta+1)q$. En diviſant le premier membre de l'équation (B) par t, le ſecond par $\frac{aq}{u}$, & faiſant $m=(\theta+1)q$; on trouvera l'équation,

$$(C)\ Q' \times c = \frac{N}{q}\Big[\Big(\tfrac{1}{4} - \frac{\text{cof. } m^2}{2}\Big) q + \frac{\text{fin. } 2q}{8}$$

$$+ \frac{2k \text{ cof. } m^3}{3}\Big(\frac{\text{fin. } m}{\text{cof. } m} - \frac{\text{fin. } (m-q)}{\text{cof. } (m-q)}\Big) -$$

$$\frac{2k \text{ fin. } m}{3} + \frac{2k}{3}(\text{cof. } q^3 - 3 \text{ fin. } q^2 \text{ cof. } q)$$

$$\text{fin. } (m-q) + \frac{2k}{3}(3 \text{ fin. } q \text{ cof. } q^2 - \text{fin. } q^3)$$

$$(\text{cof. } (m-q) - 1) - \frac{2k \text{ fin. } q^3 (1 - \text{cof. } (m-q))}{3 \text{ cof. } (m-q)}$$

$$+ 2k \text{ fin. } q^2 \text{ cof. } q. \text{ L. } \frac{1 + \text{fin. } (m-q)}{\text{cof. } (m-q)} + \frac{k^2 q}{4}$$

$$(\theta + 1 - \text{fin. } q^4 - \text{cof. } q^4 + 6 \text{ cof. } q^2 \text{ fin. } q^2)$$

$$- \frac{k^2 \text{ cof. } m^4}{4}\Big(\frac{\text{fin. } m}{\text{cof. } m} + \frac{\text{fin. } m^3}{3 \text{ cof. } m^3} -$$

$$\frac{\text{fin. } (m-q)}{\text{cof. } (m-q)} - \frac{\text{fin. } (m-q)^3}{3 \text{ cof. } (m-q)^3}\Big) - k\ (\text{cof. } q^3$$

$$\text{fin. } q - \text{cof. } q \text{ fin. } q^3) \text{ L. cof. } (m-q)$$

$$- \frac{k^2}{4}(6 \text{ cof. } q^2 \text{ fin. } q^2 - \text{fin. } q^4)$$

$$\frac{\text{fin. } (m-q)}{\text{cof. } (m-q)} + \frac{k^2 \text{ cof. } q \text{ fin. } q^3 \text{ fin. } (m-q)^2}{2 \text{ cof. } (m-q)^2}$$

$$- \frac{k^2 \text{ fin. } q^4 \text{ fin. } (m-q)^3}{12 \text{ cof. } (m-q)^3}\Big],$$

formule dans laquelle Q' repréſente le poids auquel le choc du fluide peut être cenſé faire équilibre à chaque inſtant.

XIII. Pour faire une application fort ſimple de cette formule, ſuppoſons que la roue tourne avec une vîteſſe qu'on puiſſe regarder comme infiniment petite par rapport à celle du fluide. On aura en conſéquence $k = 0$, & l'équation (C) deviendra

$$Q' \times c = N\left(\frac{1}{4} - \frac{\text{coſ.}\ m^2}{2}\right) + \frac{N\ \text{ſin.}\ 2q}{8q}.$$

Donc ſi l'on veut que le moment de l'impulſion de l'eau ſoit un *maximum*, on aura, en faiſant varier q ſeulement, $2qdq$ coſ. $2q - dq$ ſin. $2q = 0$, ou bien, $2q\sqrt{(1 - (\text{ſin.}\ 2q)^2)} - \text{ſin.}\ 2q = 0$; équation à laquelle on ſatisfait, en ſuppoſant $q = 0$. D'où il ſuit que le nombre des aîles doit être infini, comme on l'a trouvé dans l'article 777.

Nous avons déja remarqué que cette concluſion ne doit pas être admiſe en rigueur. L'expérience fait voir qu'après avoir augmenté le nombre des aîles juſqu'à un certain point, on ne gagne plus guère à l'augmenter davantage ; ſans compter les autres inconvénients qu'un trop grand nombre d'aîles peut occaſionner.

XIV. Il n'eſt pas facile de trouver directement, par notre formule générale, le nombre le plus avantageux d'aîles pour une roue qui tourne avec une vîteſſe finie & comparable à celle du fluide, parce que l'équation du *maximum* eſt extrêmement compoſée & preſqu'intraitable. Mais on peut parvenir au même but d'une manière indirecte, qui conſiſte à chercher, par la même formule, les momens d'im-

pulſion pour différens nombres d'aîles & à choiſir parmi tous ces nombres celui qui donne le plus grand moment. On ſent par l'analogie des choſes & par la loi de continuité, qu'à meſure que la roue tourne plus lentement, il lui faut un plus grand nombre d'aîles.

XV. Avant que de fixer dans la pratique le nombre des aîles d'une roue, il faut faire encore une obſervation eſſentielle. Les aîles *Kk*, *Oo*, *Pp*, *Qq*, *&c* qui ſont placées en-delà de la verticale *CI* tendent à pouſſer le fluide qui a perdu par le choc une partie conſidérable de la vîteſſe qu'il avoit au-devant de la roue. Par conſéquent, s'il ne lui reſte plus aſſez de vîteſſe pour ſe ſouſtraire au choc des aîles dont on vient de parler, il en réſultera une perte de mouvement dans la machine. Le moment d'impulſion des mêmes aîles contre le fluide, eſt exprimé par une quantité analogue à celle des articles XI & XII. On voit donc que dans ce cas les mêmes moyens qui augmentent le moment d'impulſion du fluide antérieur à la roue, augmentent la réſiſtance du fluide poſtérieur. Alors il ne faut pas trop multiplier le nombre des aîles. C'eſt ce qu'on pratique avec raiſon dans les roues placées ſur des rivières. On pouſſe même à cet égard la précaution trop loin (804). Les roues qui ſe meuvent dans des courſiers demandent un aſſez grand nombre d'aîles, principalement lorſqu'on a l'attention, comme cela ſe pratique d'ordinaire, de donner un peu en-delà de la verticale

CI une chûte à l'eau pour lui faciliter le moyen de s'échapper, & de ne point gêner le mouvement de la roue.

XVI. La vîteſſe avec laquelle la roue tourne étant ſuppoſée donnée, le *momentum* d'impulſion varie ſuivant que la roue a plus ou moins d'aîles, comme nous l'avons remarqué d'après nos formules (B) & (C). Maintenant, ſuppoſons que le nombre des aîles ſoit donné, & cherchons la vîteſſe que la roue doit prendre pour que l'effet de la machine ſoit un *maximum*. Ayant multiplié le premier membre de l'équation (C) par v, vîteſſe du fardeau enlevé Q′, & le ſecond par $\frac{cu}{a}$ quantité égale à v, & de plus ayant chaſſé k par le moyen de ſa valeur $\frac{u}{V}$; on aura une équation de cette forme,

$$Q'v = Au + Bu^2 + Cu^3,$$

A, B, C étant des coëfficiens conſtans & donnés, mais qui ſont différens, ſelon que le nombre des aîles eſt plus ou moins grand. Donc pour que l'effet de la machine devienne un *maximum*, il faut que l'on ait

$$Adu + 2Budu + 3Cu^2du = 0$$

& par conſéquent

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3A.C)}}{3C}.$$

XVII. J'ai indiqué (782) la manière de comparer les effets des deux pertuis $MNOP$, $EFGH$ (Fig. 82), relativement aux momens d'impulſion qu'ils

Fig. 82.

qu'ils procurent à l'eau contre les aîles d'une roue. Voici la manière géométrique de trouver tout d'un coup le pertuis le plus avantageux.

Soient $SMPR$ la moitié de ce pertuis, $Smpr$ la moitié de l'aîle, toujours ſuppoſée en repos, que le fluide va frapper. Repréſentons par les lettres h, b, c, d, e, t, θ les mêmes choſes que dans l'article 782. De plus, ſuppoſons qu'on prenne ſur TR le point indéterminé L; & faiſons $TL = y$, la gravité $= g$, le moment élémentaire de l'impulſion de l'eau contre le petit rectangle $Lldc = dM$, le raïon Cr de la roue $= R$. Il eſt clair que la vîteſſe du fluide au ſortir du petit orifice $Lldc$ ſera repréſentée par $\sqrt{2gy}$, & qu'on aura $dM = 2gybdy \times CL = 2gybdy \times (CT + TL) = 2gybdy \times (R - h - c + y)$. Donc $M = gbyy(R - h - c) + \frac{2gby^3}{3} + A$. Cette intégrale doit s'évanouir lorſque $y = TS = h$, & recevoir ſa valeur complette, lorſque $y = Tr = h + c$. On aura donc pour l'intégrale entière

$$M = gb\,[(h+c)^2(R - h - c) + \tfrac{2}{3}(h+c)^3 - h^2(R - h - c) - \tfrac{2}{3}h^3].$$

Cela poſé, il eſt clair que le pertuis le plus avantageux eſt celui qui rend M un *maximum*. On égalera donc la quantité précédente à un *maximum*, en faiſant varier h, b, c; ce qui donnera une première équation entre h, b, c & leurs différences.

De plus, comme la ſurface de l'aîle $Smpr$ eſt

donnée, on aura $bc =$ quantité conſtante, ſeconde équation.

En troiſième lieu, la quantité d'eau que le pertuis *SMPR* fournit pendant un certain temps t, eſt donnée. On aura donc

$$\frac{4t(b+d)\sqrt{a}\left((h+c+e)^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}\right)}{3\theta} =$$

quantité conſtante, troiſième équation.

Il eſt clair que par le moyen de ces trois équations, on parviendra à connoître les trois indéterminées h, b, c.

Tous ces calculs ſont longs en général; mais ils ſont ſuſceptibles de différentes abréviations que les Géomètres trouveront aiſément, en conſidérant que les quantités d & e doivent être regardées comme très-petites par rapport aux autres. Je n'entre pas dans un plus grand détail à ce ſujet, le reſte de la ſolution n'étant plus qu'une affaire d'analyſe.

XVIII. Voilà à-peu-près tout ce qui concerne la théorie des roues à aîles, lorſque la roue eſt verticale, & que les aîles ſont dirigées au centre. Les formules établies dans les ſeize premiers articles de cette note, s'appliquent également à toutes ſortes de roues, verticales ou horiſontales, ſoit que les aîles ſoient dirigées ou non au centre, ou qu'elles ſoient inclinées au plan de la roue. Seulement les coefficiens qui affectent l'angle q, ſon ſinus & ſon coſinus, les ſinus & coſinus de ſes multiples, ſont différens, ſelon les différens cas. Ils dépendent en partie de

l'angle que l'aîle fait avec le raïon ou avec le plan de la roue. Mais cette considération n'introduit aucune nouvelle difficulté dans le calcul. Je laisse au Lecteur le soin de faire ces applications.

CHAPITRE XI.

Du mouvement des fluides élastiques.

836. Mon intention n'est pas de traiter fort au long du mouvement des fluides élastiques. Cette théorie est encore assez imparfaite dans ses élémens essentiels. Le chaud & le froid produisent des variations continuelles dans la vertu élastique ; & on ne connoît qu'à-peu-près la loi que suivent ces variations. Sans me jetter dans des généralités hypothétiques, & embarrassantes par la longueur des calculs, je me bornerai ici à examiner le mouvement de l'air, & je ne traiterai même que les problêmes dont la pratique peut faire le plus fréquent usage.

837. Soit *ABCD* (Fig. 99) un cylindre fermé de tous côtés, contenant un air homogène & également dense dans toute son étendue. Cet air est dans un état de compression, & aussi-tôt qu'on lui donnera quelqu'issue, ou qu'on lui facilitera le moyen de s'étendre ou de se dilater, il se dilatera en effet uniformément, & sa force élastique diminuera. La force élastique dans chaque état de compression est toujours égale à la force qui a produit cette com- Fig. 99.

preſſion (63 & 79). Ainſi, par exemple, ſi l'air *ABCD* eſt pareil à celui que nous reſpirons, & que par conſéquent il ait été comprimé ou par la preſſion même de l'atmoſphère, ou par une force équivalente, il ſoutiendra par ſon reſſort le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur; c'eſt-à-dire, qu'en regardant le fond ſupérieur *AD* du cylindre comme un couvercle librement mobile le long des parois, & imaginant que ce couvercle eſt chargé dans toute ſa ſurface d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, il y aura équilibre entre la force élaſtique de l'air & le poids de la colonne d'eau; & le couvercle *AD* ne pourra ni monter ni deſcendre. Je ſuppoſe que la chaleur de l'air *ABCD* demeure toujours la même; car ſi elle venoit à augmenter ou à diminuer, la force élaſtique augmenteroit ou diminueroit. Pareillement, je ſuppoſerai dans la ſuite que le degré de chaleur eſt le même pour tous les airs dont je chercherai à meſurer & à comparer les forces élaſtiques.

838. L'expérience fait voir (83 & 84) que ſi une même maſſe d'air qui conſerve toujours le même degré de température, eſt réduite à occuper ſucceſſivement différens volumes, les forces qui la compriment, & par conſéquent auſſi ſes différentes forces élaſtiques, ſuivent la raiſon inverſe des volumes, ou la raiſon directe des denſités. Or réduire une même maſſe d'air à occuper différens volumes, c'eſt la même choſe que faire entrer dans un même volume différentes quantités d'air, dont les denſités ſoient

les mêmes reſpectivement que celles de la maſſe propoſée dans ſes différens états. Concluons donc de cette expérience que ſi différentes quantités d'air occupent ſucceſſivement un même volume, elles ont des forces élaſtiques qui leur ſont proportionnelles; ou, ce qui revient au même, qui ſont proportionnelles à leurs denſités, puiſque la denſité n'eſt autre choſe que la quantité de matière compriſe ſous un même volume donné.

839. Il ſuit de-là que ſi l'on fait en *C* une petite ouverture par laquelle l'air ait la liberté de s'échapper dans le vuide, il ſortira continuellement avec la même vîteſſe qu'il a au premier inſtant. Car la denſité du fluide, & la force élaſtique qui produit l'écoulement par l'ouverture *C*, diminuent en même raiſon. Or, lorſque la maſſe à mouvoir & la force motrice conſervent entr'elles le même rapport, la vîteſſe doit demeurer la même. Si cela ne paroît pas aſſez clair, en voici une preuve plus ſenſible.

Soient, pour le premier inſtant du mouvement, P le poids auquel la force élaſtique de l'air peut faire équilibre, Q la denſité de ce fluide, V ſa vîteſſe; & nommons q la denſité qu'il a au bout d'un certain temps t, u ſa vîteſſe à la fin de ce même temps. De plus, nommons M & m les maſſes d'air qui ſortent en temps égaux dans les deux cas. Il eſt clair que la force élaſtique de l'air après le temps t, ſera $\frac{Pq}{Q}$; & comme les forces motrices ſont proportionnelles aux quantités de

mouvement qu'elles produiſent : on aura $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Mais les maſſes M & m ſont comme les produits de leurs volumes par leurs denſités, & leurs volumes ſont comme les produits de l'orifice par les vîteſſes. Ainſi l'orifice étant le même dans les deux cas, on aura $M : m :: QV : qu$. Donc $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$. D'où l'on tire $u = V$.

Ainſi, ſi le poids P eſt égal à celui d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur ; l'air, au premier inſtant, étant environ 850 fois moins denſe que l'eau, il ſortira continuellement avec la même vîteſſe que ſortiroit l'eau ſous 850 × 32, ou 27200 pieds de charge.

Quant à la loi ſuivant laquelle la denſité de l'air diminue à meſure que le temps t augmente, on la déterminera dans les notes.

840. Suppoſons maintenant que l'air à ſa ſortie du vaſe $ABCD$, au lieu de ſe répandre dans le vuide, ſe répande dans un air environnant plus rare que lui, & d'une étendue infinie telle qu'on peut toujours ſuppoſer celle de l'atmoſphère par rapport au vaſe $ABCD$. Gardons les dénominations de l'article précédent, & nommons de plus D la denſité conſtante de l'air extérieur. La réſiſtance que cet air oppoſe continuellement à la ſortie de l'air intérieur, eſt $\frac{PD}{Q}$. Ainſi, au premier inſtant, la force expulſive de l'air intérieur eſt $P - \frac{PD}{Q}$; & après le temps t, la force expulſive eſt

$\frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q}$. On aura donc, $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{PD}{Q} :: MV : mu :: QVV : quu$. D'où l'on tire

$$u = V \times \sqrt{\left[\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}\right]},$$

équation qui donne à chaque inſtant la relation de u à q, toutes les autres quantités étant conſtantes & données.

Cette équation fait voir qu'on aura $u = 0$, ou que l'air ceſſera de couler lorſqu'on aura $q = D$. Je n'ai pas beſoin de dire que ſi on avoit $D = Q$, il n'y auroit point du tout de mouvement.

841. Que le cylindre $ABCD$ ſoit vuide au premier inſtant, & que l'air extérieur, toujours infini en étendue, y entre par l'ouverture C. Nommons F la force élaſtique conſtante de cet air, D ſa denſité, V la vîteſſe avec laquelle il entre dans le cylindre au premier inſtant, u ſa vîteſſe après le temps t, q la denſité de l'air contenu dans le cylindre au bout du même temps. La force impulſive de l'air dans le cylindre ſera F au premier inſtant, & $F - \frac{Fq}{D}$ après le temps t. On aura donc, $F : F - \frac{Fq}{D} :: DVV : Duu :: VV : uu$; & par conſéquent,

$$u = V \times \sqrt{\left[1 - \frac{q}{D}\right]}.$$

D'où l'on voit que l'air ceſſera d'entrer dans le

cylindre, lorſqu'il aura la même denſité en dedans qu'en dehors.

842. Si dans la même hypothèſe il y avoit, au premier inſtant, dans le cylindre, de l'air dont la denſité fût $= Q$; on auroit $F - \frac{FQ}{D} : F - \frac{Fq}{D} :: VV : uu$, &

$$u = V \times \sqrt{\left[\frac{D-q}{D-Q}\right]}.$$

Fig. 100. 843. Soient deux cylindres $ABCD$, $CFGH$ (Fig. 100) fermés de tous côtés, & contenant chacun un air différemment condenſé. Qu'on faſſe en C une ouverture par laquelle les deux airs viennent à communiquer enſemble. Il y aura un écoulement de l'air le plus denſe dans le plus rare. Suppoſons que cet écoulement ſe faſſe du vaſe $ABCD$ dans le vaſe $CFGH$. Je nomme, pour le premier inſtant, P la force élaſtique de l'air $ABCD$, Q ſa denſité, V ſa vîteſſe, D la denſité de l'air $CFGH$; & après un certain temps t, q la denſité de l'air $ABCD$, u ſa vîteſſe, δ la denſité de l'air $CFGH$. La force expulſive de l'air $ABCD$ ſera $P - \frac{PD}{Q}$ au premier inſtant, & $\frac{Pq}{Q} - \frac{P\delta}{Q}$ après le temps t. Ainſi on aura $P - \frac{PD}{Q} : \frac{Pq}{Q} - \frac{P\delta}{Q} :: QVV : quu$. Ce qui donne

$$u = V \times \sqrt{\left[\frac{Q(q-\delta)}{q(Q-D)}\right]}.$$

L'écoulement ceſſera, lorſqu'on aura $\delta = q$.

Comme la quantité totale d'air contenue dans les deux cylindres demeure conſtamment la même ; ſi l'on nomme A la capacité ou le volume du cylindre $ABCD$, B celui du cylindre $CFGH$, on aura cette ſeconde équation,

$$A.Q + B.D = A.q + B.\delta,$$

d'où l'on tire $\delta = \frac{A(Q-q)+B.D}{B}$. Subſtituant cette valeur de δ dans la valeur de u, on aura

$$u = V \times \sqrt{\left[\frac{Q(B(q-D)-A(Q-q))}{Bq(Q-D)}\right]},$$

équation qui donne la vîteſſe u correſpondante à chaque denſité q.

844. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons ſuppoſé que les vîteſſes des écoulemens étoient ſimplement produites par les différentes forces élaſtiques de l'air. Si à ces forces ſe joignoit l'action d'un piſton qui, en ſe mouvant uniformément, pouſſât le fluide, les problêmes ne deviendroient pas plus difficiles. Car il ne faudroit qu'ajouter aux vîteſſes déterminées ci-deſſus la vîteſſe produite au paſſage de l'orifice par l'action du piſton. Ainſi, par exemple, ſi dans le cas de l'article 839, on regarde AD comme un couvercle mobile qui deſcende uniformément avec une vîteſſe k, en vertu de la preſſion d'un piſton, ou de toute autre force

qu'on voudra imaginer, & qu'on nomme n le rapport de l'aire AD à l'aire de l'orifice ; le fluide aura, par cette cauſe, au paſſage de l'orifice, une vîteſſe exprimée par $n.k$. Ajoutant cette vîteſſe à la vîteſſe V produite par la force élaſtique, la ſomme $V + n.k$ ſera la vîteſſe entiere de l'écoulement. On raiſonnera de même dans les autres cas.

Si le fluide avoit une étendue aſſez grande en hauteur pour qu'on ne pût pas ſe diſpenſer d'avoir égard à ſon poids, il ne ſe condenſeroit pas ou ne ſe dilateroit pas uniformément dans ſes différens états ; & la détermination du mouvement ſeroit un peu plus difficile. Mais je ne dirai rien de ce cas qui a rarement lieu dans la pratique. On voit que toute cette théorie s'applique principalement au mouvement de l'air dans la machine Pneumatique & dans les Pompes.

NOTES SUR LE CHAPITRE XI.

Note 1. (*Art.* 839).

Soient H la hauteur dûe à la vîteſſe conſtante V de l'air au paſſage C, θ le temps qu'un corps grave mettroit à tomber de la hauteur a, C l'aire de l'orifice, A le volume du cylindre $ABCD$. On trouvera, comme dans l'article 245, que pendant l'inſtant dt il ſort un petit volume d'air exprimé par $\frac{2Cdt\sqrt{aH}}{\theta}$, & par conſéquent une petite maſſe

exprimée par $\frac{2Cqdt\sqrt{aH}}{\theta}$. Mais d'un autre côté, il eſt évident qu'après le temps t, la maſſe d'air ~~contenue dans le~~ sortie du cylindre, eſt $A.Q - A.q$. On aura donc $\frac{2Cqdt\sqrt{aH}}{\theta} = d(A.Q - A.q)$, ou bien

$$dt = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aH}} \times - \frac{dq}{q},$$

dont l'intégrale eſt, en faiſant $t = 0$, lorſque $q = Q$,

$$t = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aH}} \times L. \frac{Q}{q}.$$

On voit par cette expreſſion du temps que le vaſe $ABCD$ ne ſe vuidera qu'au bout d'un temps infini.

Note 2. (Art. 840).

I. Soient H la hauteur dûe à la vîteſſe V, & gardons toutes les autres dénominations. Il eſt évident que la hauteur dûe à la vîteſſe u ſera $H \times \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}$. Ainſi la petite maſſe d'air qui ſort pendant l'inſtant dt eſt $\frac{2Cqdt}{\theta}\sqrt{\left[\frac{aHQ(q-D)}{q(Q-D)}\right]}$. Mais cette maſſe a pour autre expreſſion $d(A.Q - A.q)$. Ainſi on aura

$$dt = \frac{\theta A\sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times \frac{-dq}{\sqrt{(qq - Dq)}};$$

dont l'intégrale eſt, en faiſant toujours $t = 0$, lorſque $q = Q$,

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times L. \left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(qq - Dq)}}\right).$$

II. Nous avons vu que l'air ceſſe de couler, lorſque $q = D$. Faiſant donc $q = D$ dans l'expreſſion du temps, on aura

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(Q-D)}}{2C\sqrt{aHQ}} \times L. \left(\frac{Q - \frac{1}{2}D + \sqrt{(Q^2 - DQ)}}{\frac{1}{2}D}\right);$$

pour le temps que dure l'écoulement.

Note 3. (Art. 841).

I. En nommant H la hauteur dûe à la vîteſſe V, & gardant les autres dénominations, la petite maſſe d'air qui entre dans le cylindre $ABCD$ pendant l'inſtant dt, eſt exprimée par $2C.Ddt$ $\sqrt{\left[\frac{aH(D-q)}{D}\right]}$; & comme elle a $d(Aq)$ pour ſeconde valeur, on aura

$$dt = \frac{\theta A}{2C\sqrt{aHD}} \times \frac{dq}{\sqrt{(D-q)}},$$

dont l'intégrale priſe de manière que $q = 0$, donne $t = 0$, eſt

$$t = \frac{\theta A}{C\sqrt{aHD}} \times \left(\sqrt{D} - \sqrt{(D-q)}\right).$$

II. Le mouvement ceſſe lorſque $q = D$. Ainſi la durée totale de ce mouvement eſt donnée par la formule

$$t = \frac{\theta A}{C\sqrt{aH}}.$$

Note 4. (*Art.* 842).

I. L'équation entre le temps t & la denſité q eſt, en faiſant $t = 0$, lorſque $q = Q$,

$$t = \frac{\theta A \sqrt{(D - Q)}}{CD\sqrt{aH}} \times \left(\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}\right).$$

II. Le mouvement ceſſe, lorſque $q = D$; & par conſéquent ſa durée eſt

$$t = \frac{\theta A (D - Q)}{CD\sqrt{aH}}.$$

Note 5. (*Art.* 843),

I. Qu'on prenne, pour abréger un peu le calcul, $Q(B + A) = M$, $B.Q.D + B.Q^2 = N$, $B.Q - B.D = R$, $\frac{N}{M} = m$. On trouvera, en procédant toujours de même,

$$2Cqdt\sqrt{\left[\frac{aH(Mq - N)}{Rq}\right]} = d\,(A.Q - A.q),$$

ou bien

$$dt = \frac{\theta A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \times \frac{dq}{\sqrt{(qq - mq)}},$$

dont l'intégrale complettée de manière que $q = Q$ rende $t = 0$, eſt

$$t = \frac{\theta A\sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \times \text{L.}\left(\frac{Q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(Q^2 - mQ)}}{q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(q^2 - mq)}}\right).$$

II. Le mouvement ceſſe lorſque $\delta = q$; & comme on a toujours $A.Q + B.D = A.q + B.\delta$, on aura alors $q = \frac{A.Q + B.D}{A + B}$. Repréſentons cette quan-

tité par la ſimple lettre G, & ſubſtituons-la dans l'expreſſion du temps ; nous trouverons

$$t = \frac{\theta A \sqrt{R}}{2C\sqrt{aHM}} \times L.\left(\frac{Q - \frac{1}{2}m + \sqrt{(Q^2 - mQ)}}{G - \frac{1}{2}m + \sqrt{(G^2 - mG)}}\right),$$

pour la durée du mouvement dont il s'agit.





TABLE DES MATIERES CONTENUES DANS LE SECOND VOLUME.

SUITE DE LA SECONDE PARTIE.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

Fin de la Table du second Volume.

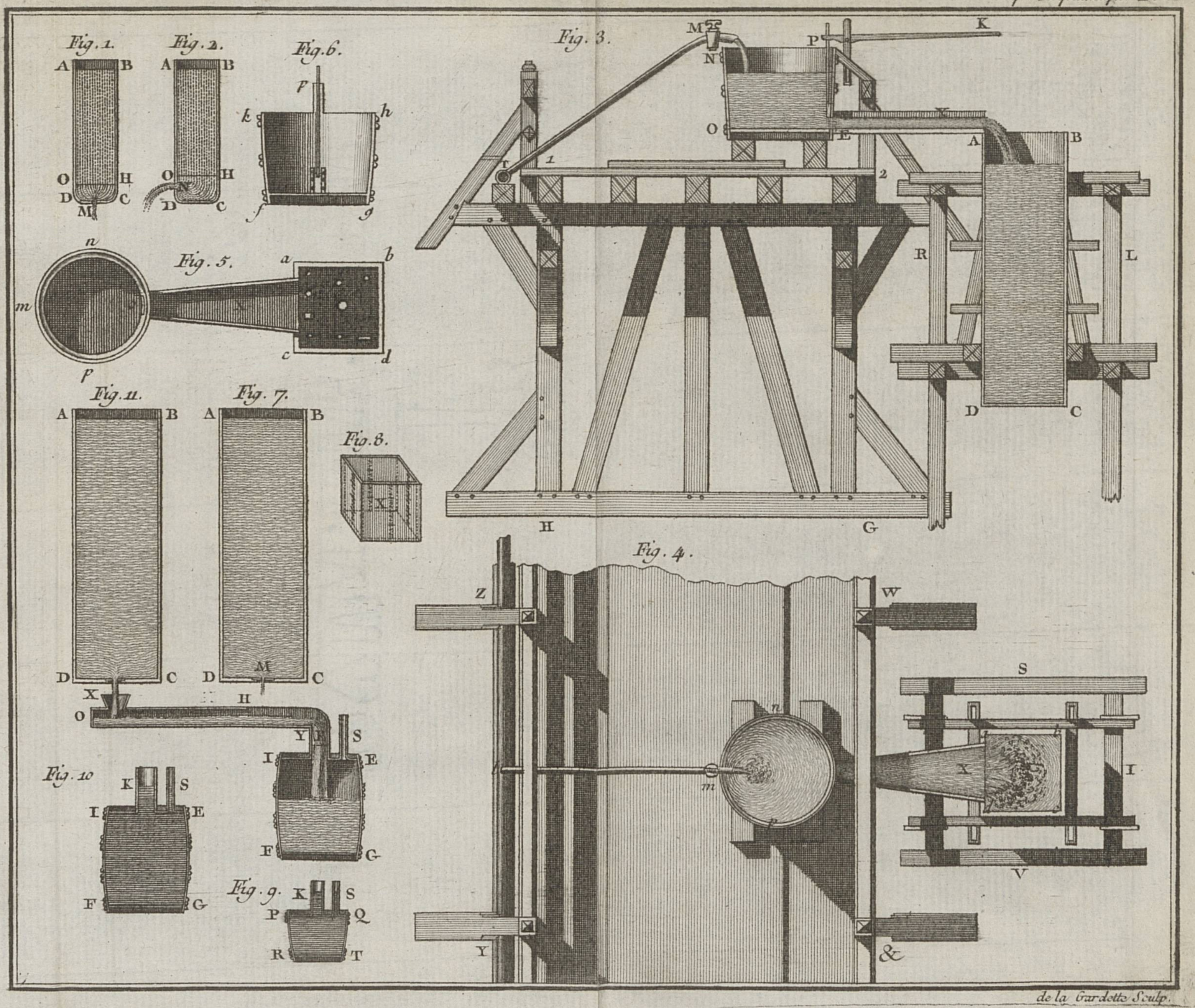
ERRATA du Tome II.

PAGE 101, *ligne* 10, *mnuh lisez mnub*
Ibid. ligne 26, *même correction*
Page 123, *ligne* 26, *efgh lisez efgd*
Page 139, *ligne* 12, *FR lisez LR*
Page 176, *ligne* 13, tranche *lisez* tranchée
Page 252, *ligne* 1, articule *lisez* particule
Page 266, *ligne* 17, perd *lisez* perde
Page 275, *ligne* 28, fait *lisez* fait
Page 364, *ligne* 10 *C lisez CD*
Page 366, *ligne* 3, fardeau *Q lisez* fardeau *Q'*
Même correction pour les endroits de cette page, dans lesquels il est parlé du fardeau.
Page 381, *ligne* 8, *E.v' lisez N.v'*
Page 389, *ligne* 19, *cI lisez CI*
Ibid. ligne 20, *MPc lisez MPC*
Page 390, *ligne* 17, *XZVT lisez XZYT*

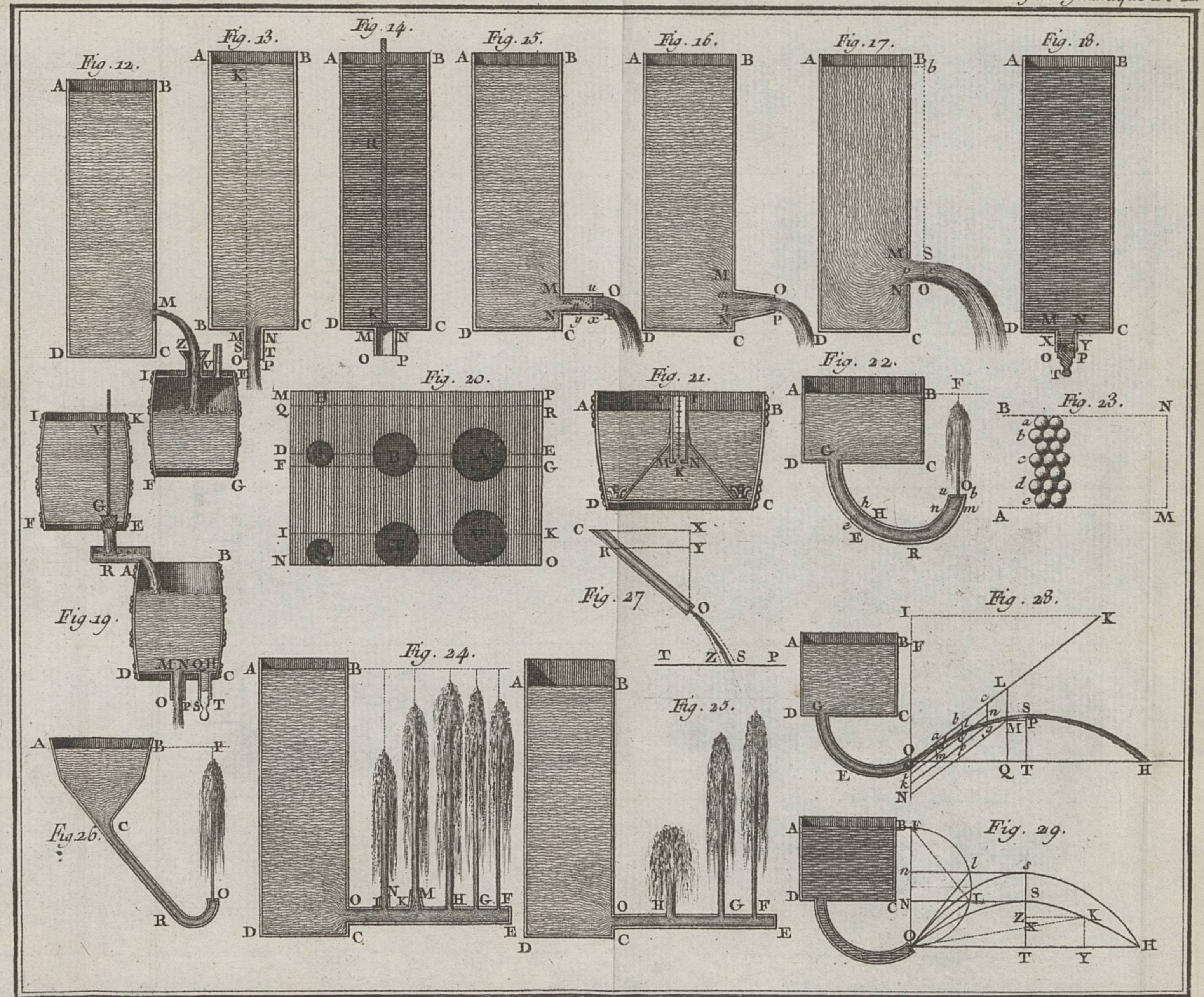
ÉCLAIRCISSEMENT.

Page 144, vers la fin. *Remarquez que le mobile ne perd en* q *qu'une partie infiniment petite du second ordre de sa vîtesse, quoique* tr *soit infiniment petit du troisième ordre ; parce que l'espace* qt *infiniment petit du premier ordre est parcouru dans un temps infiniment petit ; ce qui rend la vîtesse une quantité finie.*

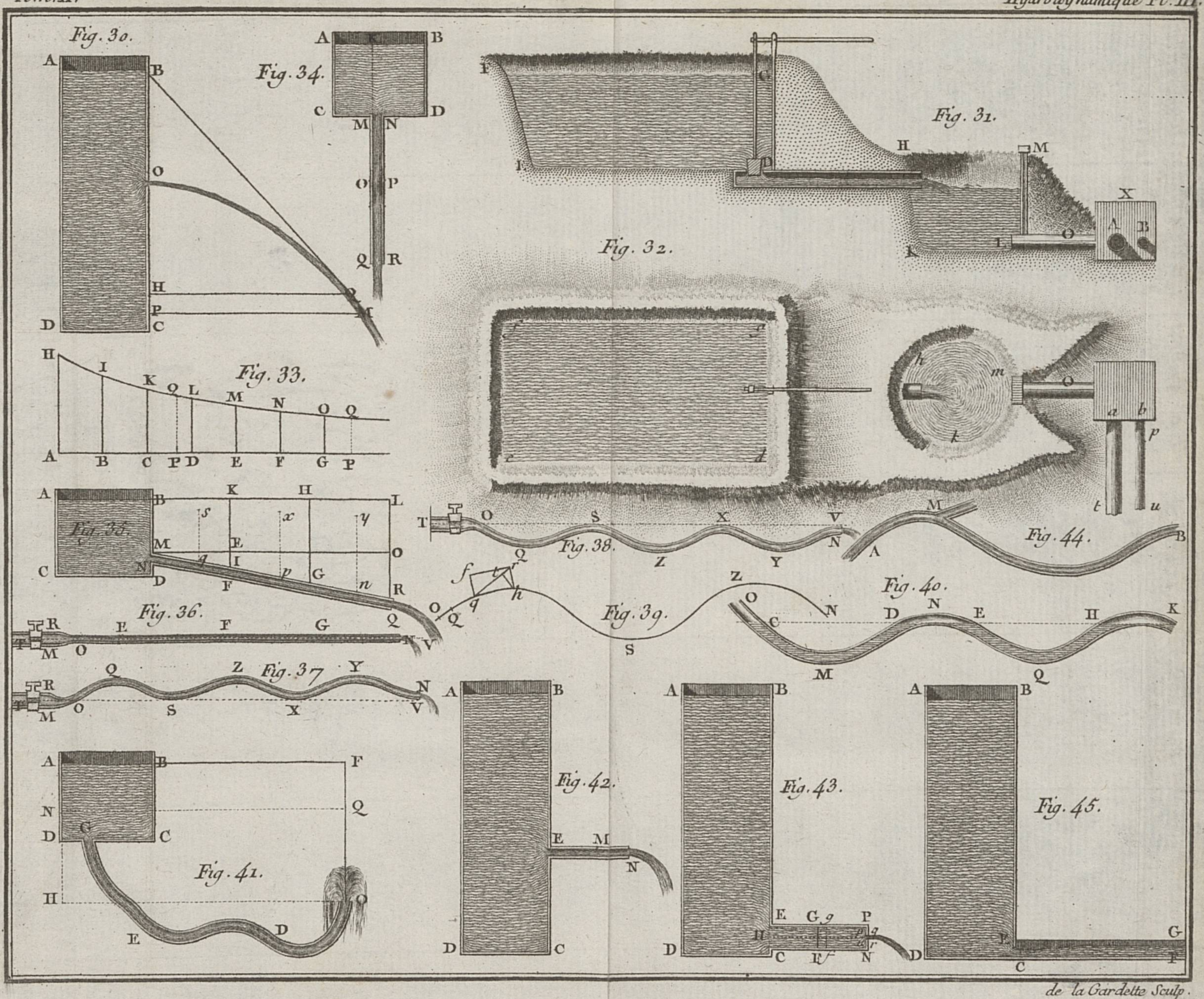
De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande. 1771.



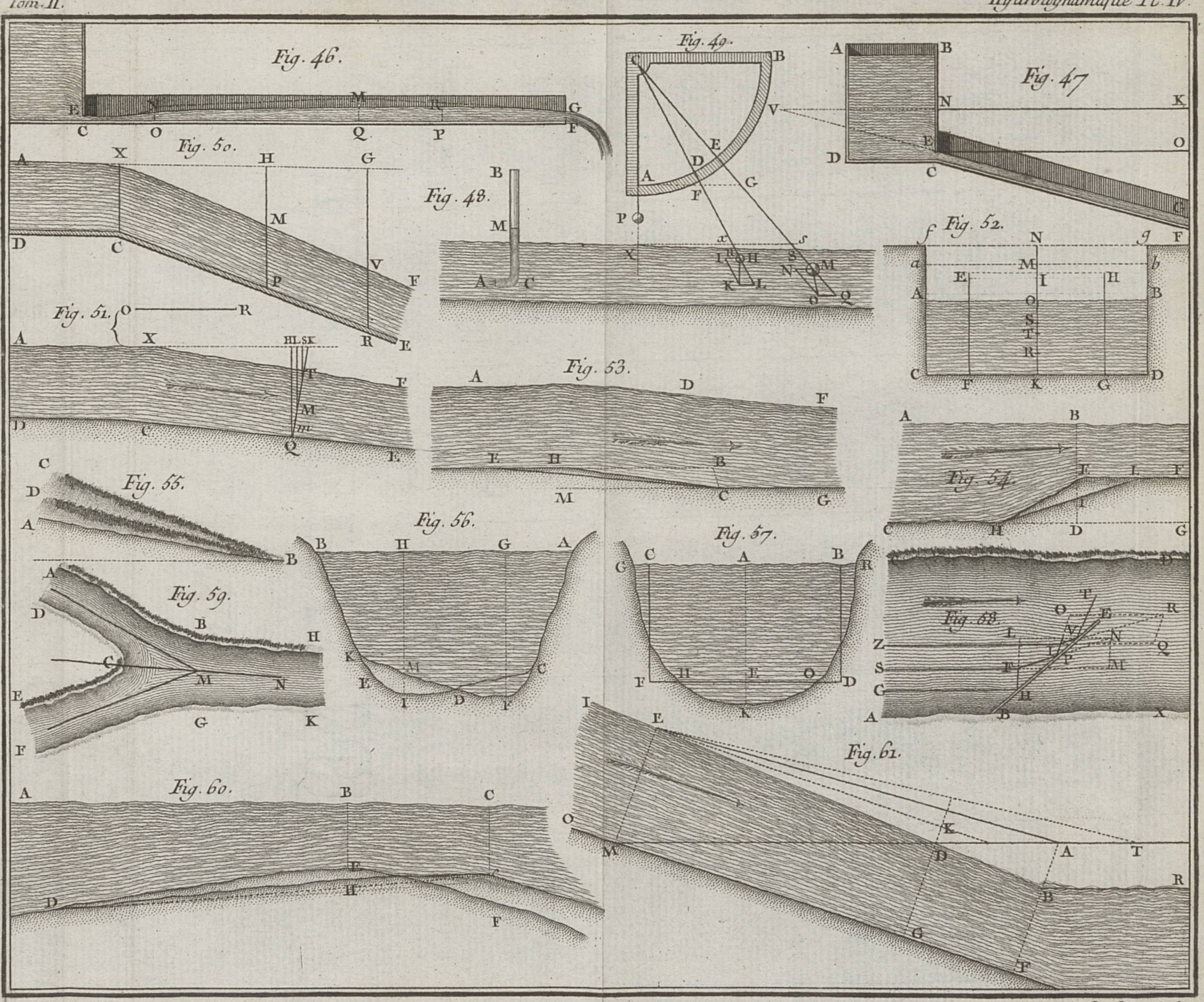
de la Gardette Sculp.



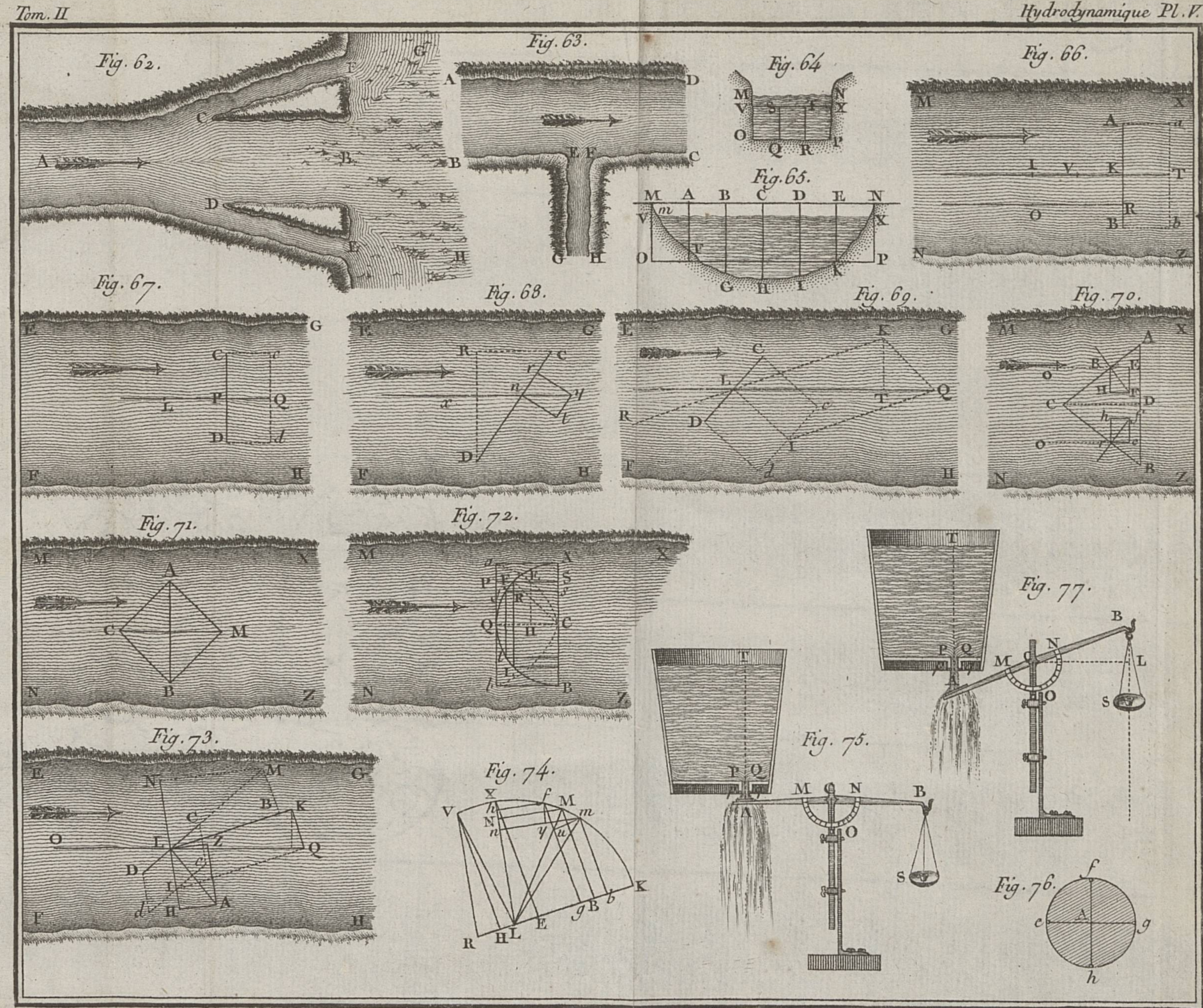
de la Gardette Sculp.



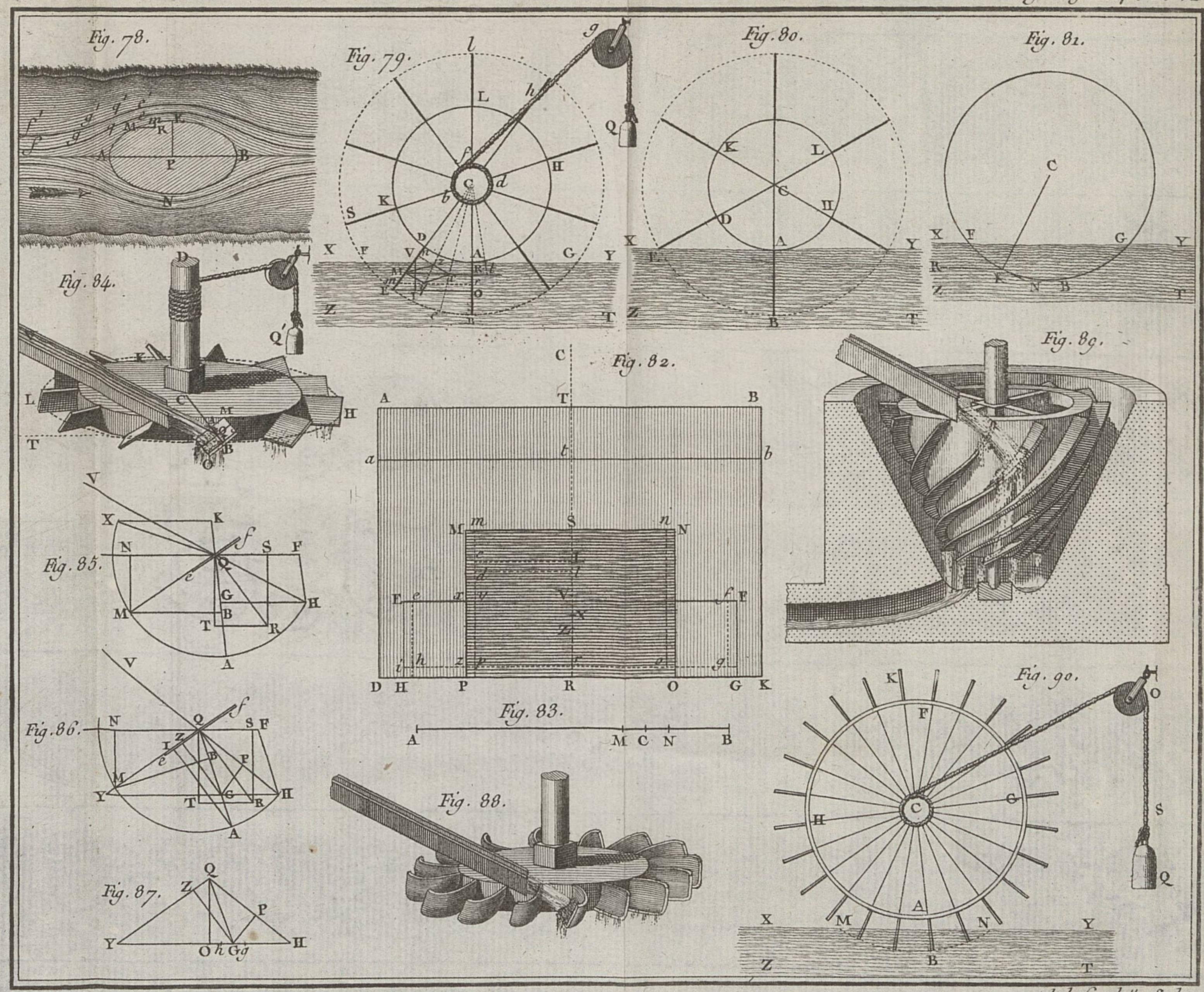
de la Gardette Sculp.



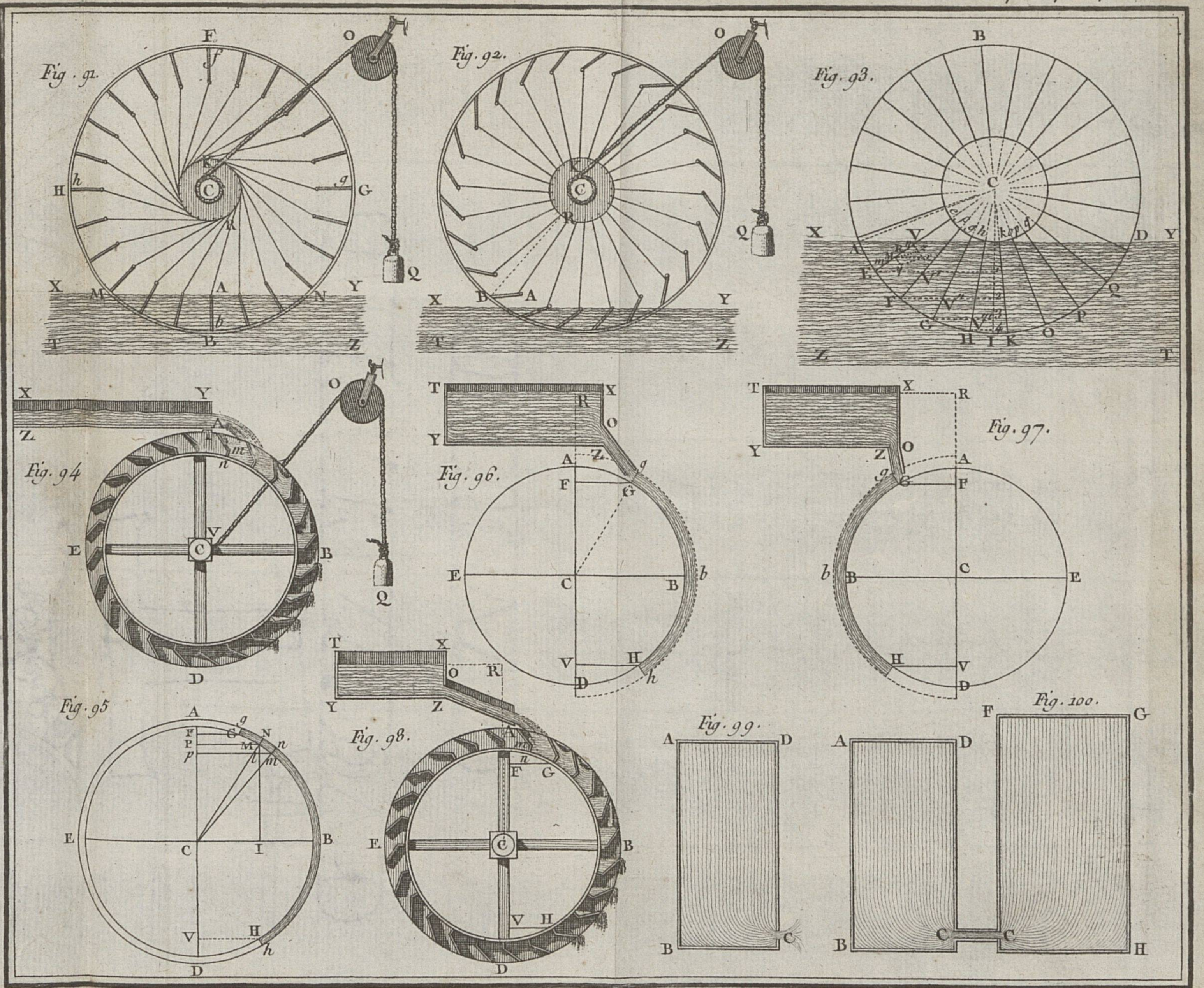
de la Gardette Sculp.



de la Gardette Sculp.

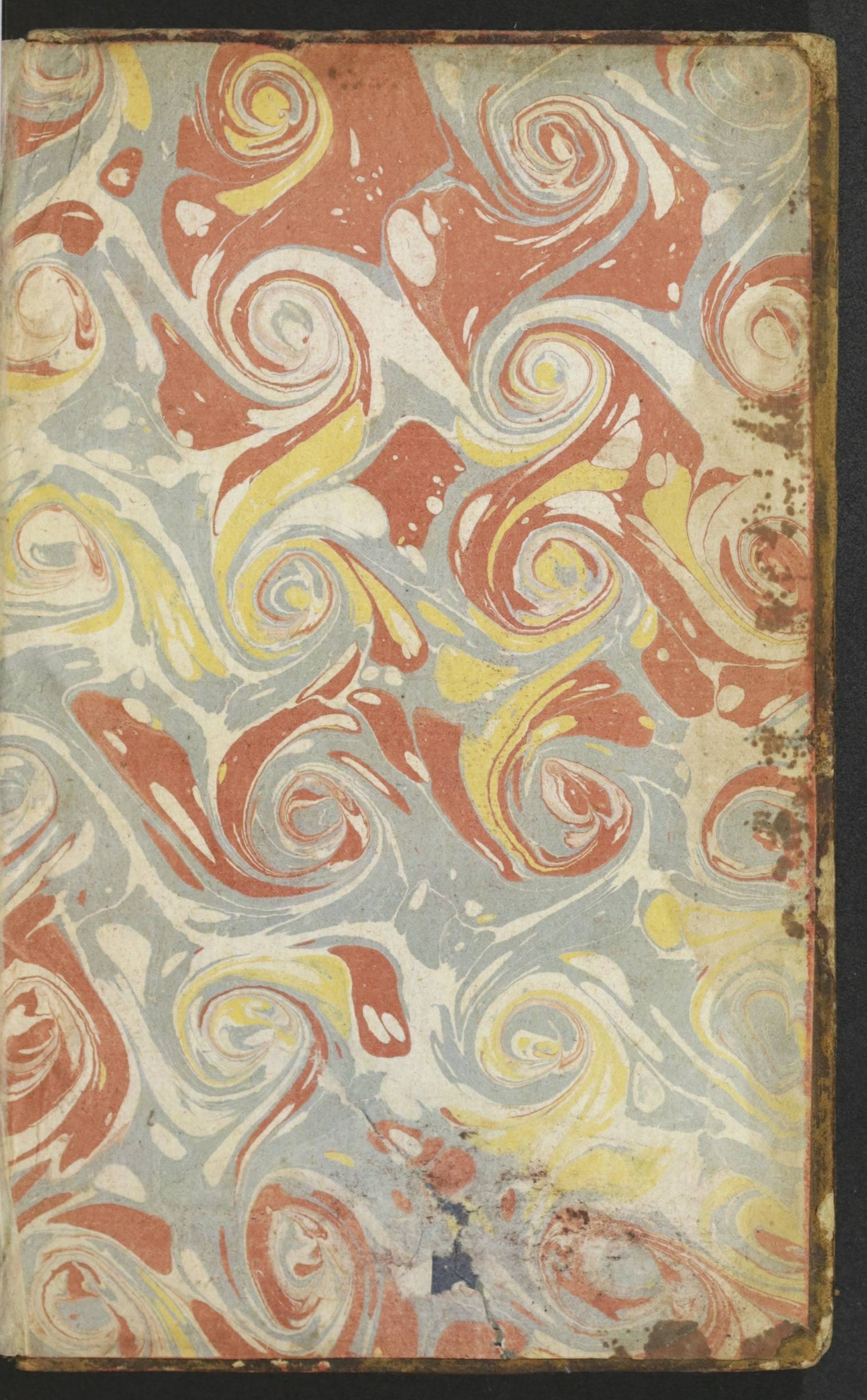


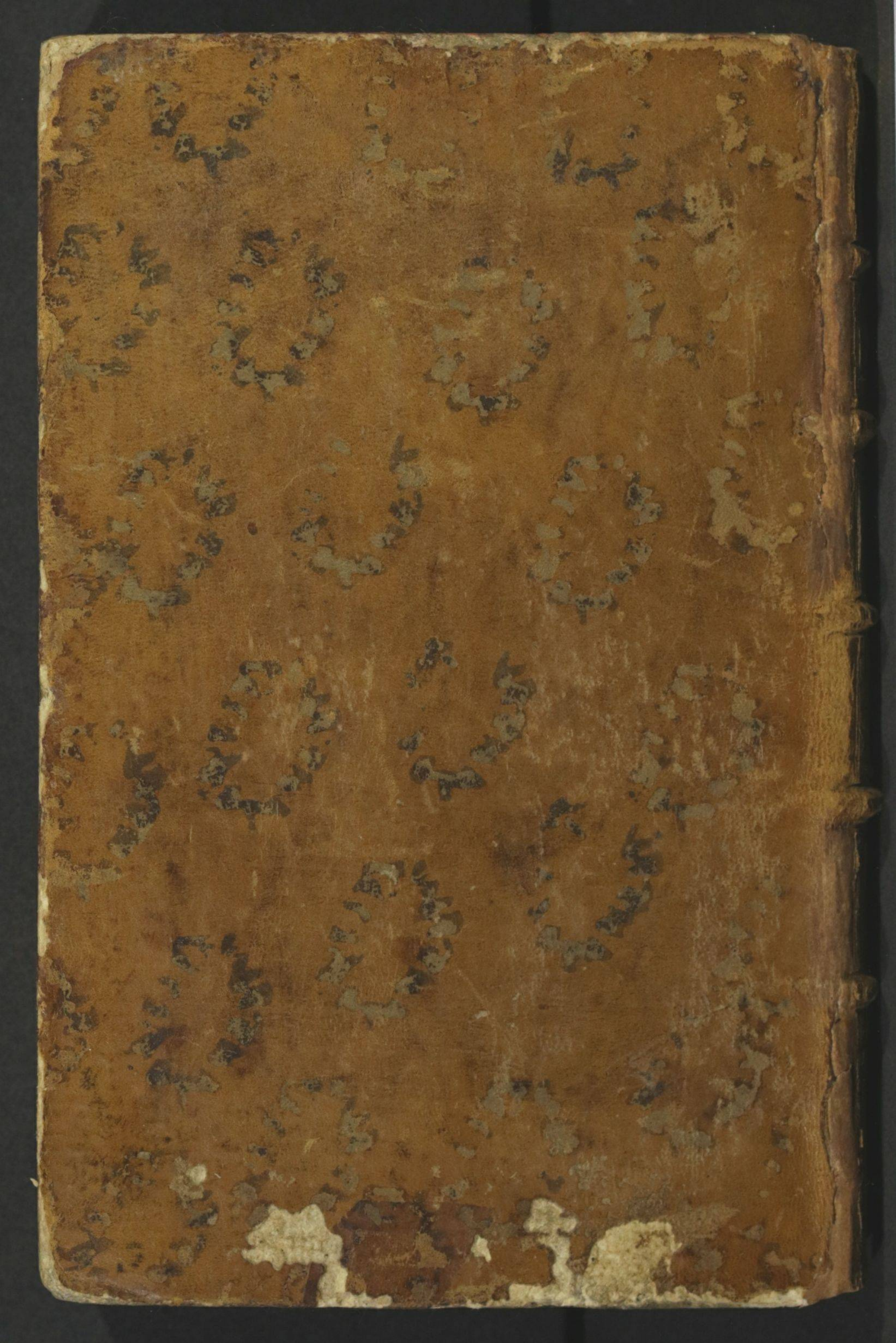
de la Gardette Sculp.



de la Gardette Sculp.








HYDRODYNA
DE
BOSSUT
TOM II



inches 4 3 2 1 0 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams